Höhere Mathematik I/II **Diplomvorprüfung** **01.09.08**

1. Klausur

für Studierende der Fachrichtung
el, kyb

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Verlangt** und **gewertet** wird die Bearbeitung **aller 6** Aufgaben. Alle Schritte sind ausreichend zu begründen, eine Angabe der Ergebnisse allein reicht nicht!
- Ergebnisse von unbearbeiteten Aufgaben dürfen im späteren Verlauf verwendet werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 10 handbeschriebene DIN A4 Blätter
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab Anfang Oktober auf der Seite des Prüfungsamtes (https://studius.uni-stuttgart.de) eingesehen werden. Ankündigung auf der Homepage zu HM II.

  Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Soweit mündliche Nachprüfungen erforderlich sein sollten, so werden die Termine direkt im Anschluss an die Klausureinsicht am 13.10.08 (14.00-17.15) vergeben. Eine individuelle Benachrichtigung der betreffenden Kandidatinnen und Kandidaten erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an der Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (12 Punkte):
Bestimmen Sie ein komplexes und reelles Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ existiert.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei das lineare Gleichungssytem $Ax = b$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und dem Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des obigen Gleichungssystems.

b) Bestimmen Sie die Basen und die Dimension des Bildes und des Kerns der durch $x \mapsto Ax$ gegebenen linearen Abbildung.

Aufgabe 3 (12 Punkte): Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A.

b) Berechnen Sie $\exp(A)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte):
Die Fibonacci-Folge (f_n) ist gegeben durch die Iterationsvorschrift:
$f_1 = 1, f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und hat die explizite Darstellung
$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(g^n - \frac{1}{(-g)^n}\right)$ mit $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es sei nun $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$.

b) Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existiert und berechnen Sie diesen.

Aufgabe 5 (8 Punkte):

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = -8i$$

in der Form $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Hinweis: $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{i\alpha k}$ für $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$ und zeigen Sie: $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \cos\frac{2k\pi}{n} = 0$ für $n = 2, 3, \ldots$.
Hinweis: geometrische Summe

Aufgabe 6 (12 Punkte):

a) Für welche $\alpha > 0$ existiert das Integral $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$?

b) Berechnen Sie $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)^2}$.