Klausur der Diplomvorprüfung

für **verf**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Erlaubte Hilfsmittel: **10 Blätter DIN A4 eigenhändig beschrieben.**
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig!
- Lesen Sie zunächst die Aufgabenstellungen aufmerksam durch und beachten Sie, dass je nach Lösungsweg die gegebenen Hinweise hilfreich sein können.
- In allen Aufgaben sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 20. 04. 2009 über das Studenteninformationssystem Universität Stuttgart (`https://studius.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich vom 20. 04. bis 29. 04. 2009 bei Frau Bock (Zimmer V57-7.129) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*11 Punkte*) Gegeben ist der Körper K mit der Parametrisierung

$$K: \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \Phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in [0,2]\,,\ \varphi \in [0,\pi/2]\,,\ \vartheta \in [0,\pi/6]\,.$$

a) Berechnen Sie $\left|\det \dfrac{\partial \Phi}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}(r,\varphi,\vartheta)\right|$ sowie das Volumen von K.

b) Berechnen Sie den Fluss $\int_O F(x)\cdot n(x)\,ds_x$ des Vektorfeldes

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ -x_1^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche O des Körpers K nach außen.

Hinweis: $\sin(\pi/6) = 1/2\,,\ \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2\,.$

Aufgabe 2 (*11 Punkte*) Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$ der folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'(x) = 9x^2\dfrac{\ln(x)}{y(x)}, \qquad y(1) = -1$

b) $y'(x) = y(x) - xe^{2x}, \qquad y(0) = 0$

c) $3\big(y(x)\big)^2 - 2x + \big(6xy(x)\big)y'(x) = 0, \quad y(1) = 2/\sqrt{3}$

Aufgabe 3 (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems $y'(x) = Ay(x)$.

b) Ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem $u'(t) = Bu(t)$ besitzt die allgemeine reelle Lösung

$$u_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $u'(t) = Bu(t) + b(t)$ mit

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 2x^2, \qquad -1 < x \leq 1\,,$$

die 2-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der reellen Fourier-Reihe von f.

b) Geben Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe von f an.

c) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der Ableitung von f. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourier-Reihe von f' im Punkt $x_0 = 1$?

d) Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourier-Reihe von f den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\,.$$

Aufgabe 5 (*11 Punkte*)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{xx}u(x,y) + \partial_{yy}u(x,y) &= 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,,\, 0 \leq y \leq 1\,, \\ u(0,y) &= u(\pi,y) = 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \\ u(x,1) &= 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,. \end{aligned}$$

b) Verwenden Sie **a)** zur Bestimmung der Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_{xx}v(x,y) + \partial_{yy}v(x,y) &= 0\,, \quad 0 \leq x \leq \pi\,,\, 0 \leq y \leq 1\,, \\ v(0,y) &= v(\pi,y) = y\,, \\ v(x,0) &= 0\,, \\ v(x,1) &= 1 + 7\sin(3x) - 3\sin(7x)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Der Graph der Funktion $y = f(x) = 1 + x^2\,,\; x \in [0,1]$, schließt zusammen mit den Geraden $x = 0\,,\; x = 1$ und $y = 0$ eine Fläche A ein.

a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A.

b) Berechnen Sie den Schwerpunkt S der Fläche A.

c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers K, der entsteht, wenn die Fläche A um die x-Achse rotiert.
