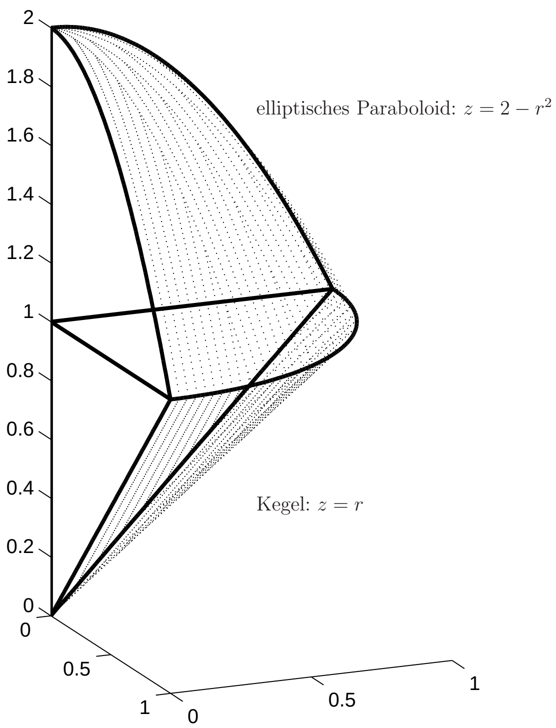
Aufgabe 1 (*12 Punkte*) Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt des Körpers

$$K: \qquad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,, \quad x^2+y^2 \leq z^2\,, \quad x^2+y^2+z \leq 2\,.$$



In Zylinderkoordinaten haben die Gleichungen die Form

$$\begin{aligned} r\cos\varphi \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\,, \\ r\sin\varphi \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi \in [0,\pi]\,, \\ z \geq 0\,,\ r^2 \leq z^2 \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq r \leq z\,, \\ r^2 + z \leq 2 \quad &\Rightarrow \quad z \leq 2 - r^2\,. \end{aligned}$$

Aus der dritten und vierten Gleichung folgt $r \leq 2 - r^2 \Rightarrow r \leq 1$ also ist das Volumenintegral in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r^2} r\,dz\,dr\,d\varphi &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (2 - r^2 - r) r\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\left[r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi(1 - 1/4 - 1/3)}{2} = \frac{5\pi}{24}\,. \end{aligned}$$

Für die z-Koordinate des Schwerpunkts ist

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r^2} z\,r\,dz\,dr\,d\varphi &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{(2-r^2)^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) r\,dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 (4 - 4r^2 + r^4 - r^2) r\,dr \\ &= \frac{\pi}{4}\left[2r^2 - \frac{5r^4}{4} + \frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{\pi(2 - 5/4 + 1/6)}{4} = \frac{11\pi}{48}\,, \end{aligned}$$

also $s_z = 11/10$.

Für die x-Koordinate des Schwerpunkts ist

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos\varphi \int_{r=0}^{1} \int_{z=r}^{2-r^2} r^2\,dz\,dr\,d\varphi = \int_0^1 \left(2 - r^2 - r\right) r^2\,dr = \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^5}{5} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{13}{60}\,,$$

also $s_x = 26/(25\pi)$. Aus Symmetrie ist $s_y = s_x$.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Körpers

$$K: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4\,, \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

nach außen.

Hinweis: $\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

Übergang von Zylinder zu Kugel bei $x_3^2 = 3$

Zylindermantel:

$$\int_Z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} ds_x = \int_{z=-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi \, dz = 4\sqrt{3}\pi$$

Kugelsegment:

$$\int_K \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ds_x = \int_{\vartheta=\pi/3}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\, r^2 \cos\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = 16\pi(1 - \sqrt{3}/2)\,.$$

Fluss gesamt (2*Kugelsegment + Zylindermantel):

$$2 \cdot 16\pi(1 - \sqrt{3}/2) + 4\sqrt{3}\pi = 4\pi(8 - 3\sqrt{3})\,.$$

Variante: Lösung mit Gauß durch Integration

In Zylinderkoordinaten lautet der Körper

$$K: \quad r^2 + z^2 \le 4\,, \quad r^2 \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad K: \quad -\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}\,, \quad 0 \le r \le 1\,.$$

Der Satz von Gauß liefert somit

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot n(x) \, ds_x = \int_K \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} 3r \, dz \, d\varphi \, dr = 6\pi \int_{r=0}^{1} 2r\sqrt{4 - r^2} \, dr\,,$$

und die Substitution $t = 4 - r^2$ führt auf

$$= -6\pi \int_{r=4}^{3} \sqrt{t} \, dt = -6\pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2}\right]_4^3 = 4\pi\left(8 - 3\sqrt{3}\right)\,.$$

Aufgabe 3 (*11 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0$$

sowie die spezielle Lösung, für die $y(0) = 4$ und $y(1) = 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 8\sin(x)\,.$$

---

a) Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = -3\,,$$

somit ergibt sich die allgemeine reelle Lösung zu

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}\,.$$

Aus den Randbedingungen

$$\begin{array}{rcccl} 4 &=& y(0) &=& c_1 \\ 0 &=& y(1) &=& c_1 e^{-3} + c_2 e^{-3} \end{array}$$

folgt $c_1 = 4$, $c_2 = -4$. Somit ist die spezielle Lösung

$$y(x) = 4(1-x)e^{-3x}\,.$$

b) Das charakteristische Polynom der homogenen Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2-i,\ \lambda_2 = 2+i\,,$$

somit ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$y_h(x) = \hat{c}_1 e^{(2-i)x} + \hat{c}_2 e^{(2+i)x}\,,$$

die allgemeine reelle Lösung lautet

$$y_h(x) = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x)\,.$$

Die rechte Seite ist von der Form $f(x) = \operatorname{Im}\left(p(x)e^{(0+i)x}\right)$, wobei p ein Polynom vom Grade Null ist und $\lambda = i$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es liegt also keine Resonanz vor, der Ansatz für die partikuläre komplexe Lösung lautet:

$$y_p(x) = a e^{ix}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt mit Hilfe der Operatorenmethode:

$$\begin{aligned}
(D-(2-i)E)(D-(2+i)E)ae^{ix} &= 8e^{ix} \\
e^{ix}(D-(2-2i)E)(D-2E)a &= 8e^{ix} \\
(D-(2-2i)E)(-2a) &= 8 \\
a(1-i) &= 2
\end{aligned}$$

also $a = 1+i$ und somit die allgemeine komplexe Lösung zur rechten Seite $3e^{ix}$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \hat{c}_1 e^{(2-i)x} + \hat{c}_2 e^{(2+i)x} + (1+i)e^{ix}\,.$$

Die allgemeine reelle Lösung zur rechten Seite $8\sin(x) = \mathrm{Im}(8e^{ix})$ lautet demnach

$$y(x) = c_1 e^{2x}\cos(x) + c_2 e^{2x}\sin(x) + \cos(x) + \sin(x)\,.$$

Aufgabe 4 (*8 Punkte*) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$2xy(x)e^{(x^2)} + \big(3 + y(x)\big)e^{(x^2)}y'(x) = 0\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die gegebene Differentialgleichung nicht exakt ist.

b) Bestimmen Sie einen nur von y abhängenden integrierenden Faktor λ für die gegebene Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie die implizite Form der allgemeinen reellen Lösung der Differentialgleichung.

d) Bestimmen Sie die implizite Form der speziellen Lösung, welche $y(0) = 1$ erfüllt.

---

a) Aus

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2xye^{x^2} &\Rightarrow\quad f_y(x,y) &= 2xe^{x^2} \\ g(x,y) &= (3+y)e^{x^2} &\Rightarrow\quad g_x(x,y) &= 2x(3+y)e^{x^2} \end{aligned}$$

folgt

$$f_y(x,y) - g_x(x,y) = 2x(2+y)e^{x^2} \neq 0\,,$$

die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

b) Für den integrierenden Faktor muss gelten

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = \frac{g_x(x,y) - f_y(x,y)}{f(x,y)} = \frac{2x(2+y)e^{x^2}}{2xye^{x^2}} = \frac{2+y}{y} = \frac{2}{y} + 1\,,$$

also

$$\lambda'(y) = \left(\frac{2}{y} + 1\right)\lambda(y) \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(y) = e^{2\ln(y)+y} = y^2e^y\,.$$

c) Das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} \lambda(y)f(x,y) \\ \lambda(y)g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^3e^{x^2+y} \\ (3y^2+y^3)e^{x^2+y} \end{pmatrix}$$

besitzt nach obigen Überlegungen ein Potential, welches sich zu

$$\Phi(x,y) = y^3e^{x^2+y}$$

berechnen lässt. Die allgemeine reelle Lösung hat die Form $\Phi(x,y) = c$, also

$$y^3(x)e^{x^2+y(x)} = c \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$

d) Einsetzen in die allgemeine Lösung liefert die spezielle Lösung.

$$1^3e^1 = e = c \qquad \Rightarrow \qquad y^3(x)e^{x^2+y(x)} = e$$

Aufgabe 5 (*10 Punkte*) Gegeben sind die Funktionen

$$f_1(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \qquad f_2(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte und die Fouriertransformierte der Funktion f_1.

b) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion f_2, indem Sie die Fouriertransformierte von f_1 verwenden.

c) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$g(x) := f_1(x) - f_2(x) ,$$

indem Sie die Fouriertransformierten von f_1 und f_2 verwenden.

d) Ermitteln Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$h(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{für } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

indem Sie die Fouriertransformierte von g verwenden.

---

a) Laplacetransformierte:

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \int_0^\infty f_1(x)e^{-sx}\,dx = \int_0^1 e^{-sx}\,dx = \left[-\frac{1}{s}e^{-sx}\right]_0^1 = \frac{-e^{-s}+1}{s}$$

Da $f(x) = 0$ für $x < 0$, kann die Fouriertransformierte aus der Laplacetransformierten berechnet werden:

$$\widehat{f_1}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{L}(f_1)(i\xi) = -\frac{i(-e^{-i\xi}+1)}{\xi\sqrt{2\pi}}$$

b) Aus $f_2(x) = f_1(x-1)$ folgt die Fouriertransformierte:

$$\widehat{f_2}(\xi) = e^{-i\xi}\widehat{f_1}(\xi) = \frac{ie^{-i\xi}(e^{-i\xi}-1)}{\xi\sqrt{2\pi}}$$

c) Die Linearität der Fouriertransformation ergibt

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f_1}(\xi) - \widehat{f_2}(\xi) = \frac{i(-e^{-2i\xi}+2e^{-i\xi}-1)}{\xi\sqrt{2\pi}} = -\frac{i(e^{-i\xi}-1)^2}{\xi\sqrt{2\pi}} .$$

d) Die Funktion g ist die Ableitung der Funktion h

$$h'(x) = g(x)\,.$$

Mit dem Zusammenhang

$$\widehat{h'}(\xi) = i\xi\widehat{h}(\xi)$$

lautet die Fouriertransformierte somit

$$\widehat{h}(\xi) = -\frac{i}{\xi}\widehat{h'}(\xi) = -\frac{i}{\xi}\widehat{g}(\xi) = -\frac{(e^{-i\xi}-1)^2}{\xi^2\sqrt{2\pi}}\,.$$

Aufgabe 6 (*11 Punkte*) Lösen Sie das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
\partial_{tt} u(t,x) &= 2\partial_{xx} u(t,x) + 6u(t,x), \quad x \in (0,\pi),\ t > 0,\\
u(t,0) &= u(t,\pi) \ = \ 0,\\
u(0,x) &= 0, \quad \partial_t u(0,x) \ = \ 8\sin(x).
\end{aligned}$$

Ansatz: $u(t,x) = v(t)w(x)$

In homogene Differentialgleichung: $v''w = 2vw'' + 6vw \Rightarrow \dfrac{v''}{v} = \dfrac{2w''}{w} + 6 = c\,.$

Zweite Gleichung und Nullrandbedingungen:

$2w'' = (c-6)w \Rightarrow w_n(x) = \sin(nx)\,, \quad c_n = 6 - 2n^2\,, \quad n \geq 1$

Erste Gleichung für c_n: $v'' + (2n^2 - 6)v = 0$

Lösungen:

$$\begin{aligned}
n = 1: &\qquad v_1(t) = a_1 e^{2t} + b_1 e^{-2t}\\
n > 1: &\qquad v_n(t) = a_n \cos(\sqrt{2n^2-6}\,t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2-6}\,t)
\end{aligned}$$

Superposition:

$$u(t,x) = (a_1 e^{2t} + b_1 e^{-2t})\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \Big(a_n \cos(\sqrt{2n^2-6}\,t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2-6}\,t)\Big)\sin(nx)$$

Anfangsbedingung $u(0,x) = 0$:

$$u(0,x) = (a_1 + b_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sin(nx) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a_1 = -b_1\,,\ a_n = 0\,,\ n > 1\,,$$

Anfangsbedingung $u_t(0,x) = 8\sin(x)$:

$$u_t(0,x) = 2(a_1 - b_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sqrt{2n^2-6}\sin(nx) \overset{!}{=} 8\sin(x) \Rightarrow a_1 = -b_1 = 2\,, b_n = 0\,, n > 1\,.$$

Lösung insgesamt

$$u(t,x) = 2(e^{2t} - e^{-2t})\sin(x)\,.$$