Diplomvorprüfung Höhere Mathematik I–III

Frühjahr 1998
1. Klausur für Studierende der Fachrichtung Physik
am 09. März 1998

Bitte unbedingt beachten:

- Verlangt und gewertet werden **alle** der folgenden 9 Aufgaben. (Bearbeitungszeit: 180 Minuten).
- Als Hilfsmittel sind 30 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zugelassen. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher und elektronische Rechengeräte.
- **Falls in der Aufgabe nicht anders verlangt, sind die Lösungswege anzugeben. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.**

Hinweise für Wiederholer:

- Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis. Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 27. 4. 1998 durch Aushang in V57, 8. Stock, bekanntgegeben.
- Wiederholer, bei denen die Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird, müssen sich bis zum 6. 5. 1998 im Sekretariat des 2. Lehrstuhls des Mathematischen Instituts A, V57 8–162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung geben lassen. Eine individuelle schriftliche Einladung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich zu den angegebenen Terminen über das Ergebnis der schriftlichen Wiederholungsprüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zu dem vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
- Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
(**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^j/j!$ konvergiert absolut.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein lineares Gleichungssystem, das genau n Lösungen hat.

c) Die Menge $\mathcal{G}:\ x^2 + 2xy + y^2 = 0$ ist eine Gerade.

d) Für $x > 1$ ist $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int\limits_0^{\ln x} \exp(t)\, dt = 1$.

e) Die Funktion $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5y$ hat ein globales Minimum.

Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Bestimmen Sie für das Dreieck $\mathcal{T}$ mit den Eckpunkten $(2,2,1),(1,2,2),(1,1,1)$

a) den Flächeninhalt

b) alle Winkel

c) die Hesse-Normalform der Ebene, die $\mathcal{T}$ enthält

d) eine orthonormale Basis mit einer Achse senkrecht zu $\mathcal{T}$.

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Bestimmen Sie die Determinante des linearen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} t & t \\ t & 2-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$$

sowie alle Lösungen in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 **(15 Punkte)**

Berechnen Sie:

$$\text{a)} \int\limits_0^\pi x \sin(2x) dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{2x+3}{x^2+4} dx\ , \quad \text{c)} \int\limits_1^e \ln x \frac{dx}{x}\,.$$

Aufgabe 5 **(20 Punkte)**

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$ sowie deren Typ. Wie müssen die Parameter a, b gewählt werden, damit $(1,1)$ ein kritischer Punkt bei Hinzunahme der Nebenbedingung $g(x,y) = ax + by - 1 = 0$ wird?

Aufgabe 6 **(15 Punkte)**

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

und lösen Sie das Anfangswertproblem

$$X'(t) = AX(t), \quad X(0) = [1,0]^t.$$

Aufgabe 7 **(15 Punkte)**

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind. (**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) rot div $F =$ div rot F.

b) Der Fluß von rot F durch die Oberfläche eines Körpers ist 0.

c) div $F = 0 \Rightarrow$ Das Arbeitsintegral von F verschwindet.

d) $\sin^8(x)$ läßt sich als Cosinus-Reihe schreiben.

e) Die Laplace-Transformation von $\cos(3t) - \sin^2(7t)$ ist eine rationale Funktion.

Aufgabe 8 **(20 Punkte)**

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluß des Vektorfeldes $[xz, yz, xy]^t$ durch die Oberfläche des Prismas

$$\mathcal{P} : x + y \leqslant 1, \quad x, y \geqslant 0 \quad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

nach außen. Wie groß ist der Fluß durch die in der xy-Ebene liegende Seitenfläche?

Aufgabe 9 **(15 Punkte)**

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_j, b_j und c_j der reellen und komplexen Fourier-Reihe von $|\cos(x/2)|$ auf $[-\pi, \pi]$. Welchen Wert hat die Summe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2 \quad ?$$