Universität Stuttgart Prof. Dr. K. Höllig

Diplomvorprüfung Höhere Mathematik I–III

Herbst 1998
2. Klausur für Studierende der Fachrichtung Physik
am 1. September 1998

Bitte unbedingt beachten:

- Verlangt und gewertet werden **alle** der folgenden 9 Aufgaben. (Bearbeitungszeit: 180 Minuten).
- Als Hilfsmittel sind 30 vom Kandidaten persönlich beschriebene Blätter zugelassen. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher und elektronische Rechengeräte.
- **Falls in der Aufgabe nicht anders verlangt, sind die Lösungswege anzugeben. Eine Angabe des Endergebnisses allein genügt nicht.**

Hinweise für Wiederholer:

- Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, daß zur Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt ein mindestens ausreichendes Ergebnis. Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab 26. 10. 1998 durch Aushang in V57, 8. Stock, bekanntgegeben.
- Wiederholer, bei denen die Klausur mit der Note 5,0 bewertet wird, müssen sich bis zum 6. 11. 1998 im Sekretariat des 2. Lehrstuhls des Mathematischen Instituts A, V57 8–162 einen Termin für die mündliche Nachprüfung geben lassen. Eine individuelle schriftliche Einladung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich zu den angegebenen Terminen über das Ergebnis der schriftlichen Wiederholungsprüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zu dem vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.
- Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
(**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) $A \times B \parallel A \times C \Rightarrow B \parallel C$

b) Das LGS $A^t AX = A^t B$ besitzt für jede Matrix A eine Lösung

c) $\operatorname{grad} \exp(|X|^2) = 2X^t \exp(|X|^2)$

d) Alle Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) + \pi x(t) = \cos(t)$ sind periodisch.

e) $\log z$ besitzt im Punkt $z = 0$ eine Laurent-Entwicklung.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

a) die Inverse

b) die Eigenwerte und Eigenvektoren

c) das Minimum der quadratischen Form $f(X) = \frac{1}{2}X^t AX - 10x_1 - 5x_2$

d) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $X'(t) = AX(t)$.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Stellen Sie die Ebene durch $[0, 1, 0]^t$ senkrecht zu $[0, \cos t, \sin t]$ in parametrischer Form

$$X = P + rU + sV(t), \quad |U| = |V| = 1, \quad U - V$$

dar.
Bestimmen Sie die Gleichung $f(r, s) = 0$ der Schnittkurve der Ebene mit dem Kegel

$$\mathcal{K}: \quad x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

in dem durch U, V definierten Koordinatensystem und deren Typ für $t = \frac{\pi}{4}$ und $t = \pi$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$y = \cosh x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

sowie die Oberfläche und das Volumen des Körpers, der durch Rotation um die x-Achse entsteht.
Hinweis: $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$.

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Auf welche Menge $\mathcal{D}$ wird das Quadrat $[0, 1]^2$ durch die Transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3u \\ v(2-u) \end{bmatrix}$$

abgebildet? Berechnen Sie die Jacobimatrix S' und integrieren Sie die Funktion $f(x, y) = y^2/(6-x)^2$ über $\mathcal{D}$.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorentwicklung um 0 der Funktion $w = f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$ und ihrer Umkehrfunktion $z = g(w)$ bis zu Termen der Ordnung 4 einschließlich. Bestimmen Sie ebenfalls die Hauptteile der Funktion $1/f(z)$ an den Polstellen $z = 0$ und $z = \pi$.

Aufgabe 7 (15 Punkte)

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.
(**Begründung ist nicht notwendig.**)

a) Die Differentialgleichung $x'' = x$ besitzt nichttriviale polynomiale Lösungen.

b) Das Vektorfeld $F(X) = Y \times X$ ist quellenfrei.

c) Ein ebenes lineares Feld $F(X) = AX$ besitzt eine Stromfunktion.

d) Ist $F(X) \parallel [0,0,1]$, so ist der Fluß von rot F durch die Halbkugeloberfläche $\mathcal{H}:\ |X| = 1,\ x_3 \geqslant 0$ gleich Null.

e) Die Fouriertransformation einer geraden reellen Funktion ist reell.

Aufgabe 8 (15 Punkte)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$F(x,y) = [axy - 3x^2y^2, 2xy^3 - y^2]^t$$

eine Stromfunktion ψ mit $F = \operatorname{rot} \psi = [\psi_y, -\psi_x]$?
Bestimmen Sie ψ und berechnen Sie für alle a den Fluß von F durch den Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0), (2,0), (0,1)$ nach außen.

Aufgabe 9 (20 Punkte)

Berechnen Sie die Rotation des Vektorfeldes

$$F = \left[(xy)^{1+z},\ 0,\ z^{(1+xy)}\right]^t, \qquad x,y,z \geqslant 0$$

sowie mit Hilfe des Satzes von Stokes den Fluß von rot F durch den im positiven Oktanten liegenden Teil der Kugeloberfläche

$$\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad x,y,z \geqslant 0;$$

in Richtung der äußeren Kugelnormale.