Künzer Samstag, 20.08.2011

Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

Lösung zur Klausur

Aufgabe I.1

Es ist $f'(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Für $x_0 \in \mathbf{R}$ ist $f'(x_0) = 0$ genau dann, wenn $x_0 \in \{-1, +1\}$ ist. Somit sind dies die einzigen Flachstellen von $f(x)$ auf $\mathbf{R}$.

Entscheiden wir nun noch, ob jeweils eine Maximal- oder Minimalstelle vorliegt.

Es ist $f''(x) = (-3x + x^3)\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

Fall $x_0 = -1$. Es ist $f''(x_0) = 2\mathrm{e}^{-1/2} > 0$. Also liegt bei $x_0 = -1$ eine Minimalstelle vor.

Fall $x_0 = +1$. Es ist $f''(x_0) = -2\mathrm{e}^{-1/2} < 0$. Also liegt bei $x_0 = +1$ eine Maximalstelle vor.

Aufgabe I.2

Es ist $K_0 = 100$, $K_n = 200$, $R = 1$ und $q = 1{,}002$. Dabei ist n gesucht.

Nach Formel ist

$$n \;=\; \ln\left(\frac{K_n + \frac{R}{q-1}}{K_0 + \frac{R}{q-1}}\right) / \ln(q) \;=\; \ln\left(\frac{200 + \frac{1}{0{,}002}}{100 + \frac{1}{0{,}002}}\right) / \ln(1{,}002) \;\overset{\text{TR}}{\approx}\; 77{,}15239\,.$$

Also ist nach 78 Monaten erstmals ein Kapital von mindestens 200 Euro erreicht.

Eine nicht aufgerundete näherungsweise reelle Angabe wie z.B. $n = 77{,}2$ Monate zählt ebenfalls als richtige Antwort.

Aufgabe I.3

Zu A^2. Es wird

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Zu A^{-1}. Wir formen um.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist

$$A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe I.4

Induktionsanfang $n = 2$. Wir haben in der Tat $\sum_{k=2}^{2}(4k - 7) = (4 \cdot 2 - 7) = 1 = 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 3$.

Induktionsschritt. Sei $n \geqslant 3$. Sei die Gleichheit für $n - 1$ bekannt. Wir haben sie für n zu zeigen. Es wird

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=2}^{n}(4k-7) \quad &= \quad (4n-7) + \textstyle\sum_{k=2}^{n-1}(4k-7) \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \quad (4n-7) + 2(n-1)^2 - 5(n-1) + 3 \\ &= \quad 4n - 7 + 2n^2 - 4n + 2 - 5n + 5 + 3 \\ &= \quad 2n^2 - 5n + 3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe I.5

Wir suchen A, B, $C \in \mathbf{R}$ mit

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)^2} \overset{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \, .$$

Durchmultiplizieren mit $(x+2)(x+1)^2$ gibt die Bedingung

$$1 \overset{!}{=} A(x^2+2x+1) + B(x^2+3x+2) + C(x+2) \, .$$

Wir formen das für $\left(\begin{smallmatrix} A \\ B \\ C \end{smallmatrix}\right)$ entstehende lineare Gleichungssystem um.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist $A = 1$, $B = -1$ und $C = 1$. Folglich wird

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \textstyle\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln(x+2)]_{x=0}^1 - [\ln(x+1)]_{x=0}^1 + [-(x+1)^{-1}]_{x=0}^1 \\ &= \ln(\tfrac{3}{4}) + \tfrac{1}{2} \\ &\overset{\text{TR}}{\approx} 0{,}2123 \, . \end{aligned}$$

Aufgabe I.6

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^u x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [x(-\cos(x))]_{x=0}^u - \textstyle\int_0^u (-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -u\cos(u) + \textstyle\int_0^u \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -u\cos(u) + [\sin(x)]_{x=0}^u \\ &= -u\cos(u) + \sin(u) \, . \end{aligned}$$

Aufgabe II.1

Es wird

$$\begin{aligned} f(x) &= 10 \cdot 2^{-x/100} \\ f'(x) &= 10 \cdot 2^{-x/100} \cdot (-\tfrac{1}{100}\ln(2)) \\ f''(x) &= 10 \cdot 2^{-x/100} \cdot (-\tfrac{1}{100}\ln(2))^2 \, . \end{aligned}$$

Es wird

$$\mathrm{E}_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = -\frac{\ln(2)}{100} \cdot x \, .$$

Es wird

$$\mathrm{E}_{f'}(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)} \cdot x = -\frac{\ln(2)}{100} \cdot x \, .$$

Überprüfen wir die Voraussetzungen unseres Lemmas.

Es ist $f(x) = 10 \cdot 2^{-x/100} > 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Es ist $f'(x) = 10 \cdot 2^{-x/100} \cdot (-\frac{1}{100}\ln(2)) < 0$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

Es ist $\mathrm{E}_f(x) = \mathrm{E}_{f'}(x)$ für $x \in \mathbf{R}_{>0}$, und somit insbesondere nie zugleich $\mathrm{E}_{f'}(x) \leqslant -2$ und $\mathrm{E}_f(x) \geqslant -1$.

Also können wir unser Lemma anwenden.

Demgemäß nimmt der Gesamtgewinn $G(x) = x \cdot f(x)$ bei $x_0 \in \mathbf{R}_{>0}$ sein Maximum an, falls $\mathrm{E}_f(x_0) = -1$ ist, d.h. falls $-\frac{\ln(2)}{100} \cdot x_0 = -1$ ist, d.h. bei

$$x_0 \;=\; \frac{100}{\ln(2)} \;\overset{\text{TR}}{\approx}\; 144{,}27 \quad \text{Euro pro Tonne}\;.$$

Aufgabe II.2

Es ist

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 - \cos(x) \\ f'(x) & = & 2x + \sin(x) \\ f''(x) & = & 2 + \cos(x) \end{array}$$

Überprüfen wir die Voraussetzungen für das Newtonverfahren.

Es ist $f(\frac{1}{2}) \approx -0{,}6276 < 0$ und $f(1) \approx 0{,}4597 > 0$.

Es ist $f'(x) = 2x + \sin(x) > 0$ für $x \in [\frac{1}{2}\,, 1]$, da dort sowohl $2x$ als auch $\sin(x)$ positiv sind, letzteres, da $0 < \frac{1}{2} < 1 < \pi$.

Es ist $f''(x) = 2 + \cos(x) \geqslant 2 - 1 > 0$ für $x \in [\frac{1}{2}\,, 1]$.

Dies zeigt, daß die Voraussetzungen für das Newtonverfahren erfüllt sind.

Wir führen das Newtonverfahren durch.

Es ist

$$x_1 \;=\; 1\;.$$

Wie oben ist $|f(x_1)| \approx 0{,}4597 > 10^{-3}$. Also müssen wir fortsetzen.

Es wird

$$x_2 \;=\; x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \;=\; 1 - \frac{1-\cos(1)}{2+\sin(1)} \;(\approx\; 0{,}83821840990471\,) \;\approx\; 0{,}8382\;.$$

Es ist $|f(x_2)| = |x_2^2 - \cos(x_2)| \approx 0{,}03382 > 10^{-3}$. Also müssen wir fortsetzen.

Es wird

$$x_3 \;=\; x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \;=\; x_2 - \frac{x_2^2 - \cos(x_2)}{2x_2 + \sin(x_2)} \;(\approx\; 0{,}82424186822587\,) \;\approx\; 0{,}8242\;.$$

Es ist $|f(x_3)| = |x_3^2 - \cos(x_3)| \approx 0{,}000261 \leqslant 10^{-3}$. Also können wir $n = 3$ und $x_n = x_3 \approx 0{,}8242$ verwenden.

Hier können sich Rundungsfehler fortpflanzen. Das Ergebnis wird als richtig gewertet, sofern der Lösungsweg nachvollziehbar ist und $|f(x_n)| \leqslant 10^{-3}$ ist.

Aufgabe II.3

(1) Es ist

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x+z+yz \\ 2y+xz \\ x+2z+xy \end{pmatrix}\;.$$

Also ist

$$\nabla_f(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\;,$$

und somit $(0,0,0)$ eine Flachstelle von f.

Ferner ist

$$\mathrm{H}_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & z & 1+y \\ z & 2 & x \\ 1+y & x & 2 \end{pmatrix}\;.$$

Also ist

$$\mathrm{H}_f(0,0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 2&0&1\\ 0&2&0\\ 1&0&2 \end{pmatrix} .$$

Es ist $\mathrm{M}_1(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = 2 > 0$, $\mathrm{M}_2(\mathrm{H}_f(0,0,0)) = 4 > 0$ und

$$\mathrm{M}_3(\mathrm{H}_f(0,0,0)) \;=\; \det\begin{pmatrix} 2&0&1\\ 0&2&0\\ 1&0&2 \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 1&0&2\\ 2&0&1\\ 0&2&0 \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&0&-3\\ 0&2&0 \end{pmatrix} \;=\; 1\cdot(0\cdot 0-(-3)\cdot 2) \;=\; 6 > 0 \,.$$

Also ist $(0,0,0)$ eine lokale Minimalstelle von f und so insbesondere eine lokale Extremstelle von f.

(2) Zunächst ist in der Tat $g_1(1,0,1) = 1\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 1 - 3 = 0$.

Es ist, wie in (1),

$$\nabla_f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2x+z+yz\\ 2y+xz\\ x+2z+xy \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\nabla_f(1,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 3 \end{pmatrix} .$$

Es ist

$$\nabla_{g_1}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} y+3z\\ x\\ 3x \end{pmatrix} .$$

Da nur eine Nebenbedingung vorliegt, ist

$$N(1,0,1) \;=\; \nabla_{g_1}(1,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 3 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist

$$\nabla_f(1,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 3 \end{pmatrix}\cdot 1 \;=\; N(1,0,1)\cdot\rho_1 \,,$$

und der Lagrangemultiplikator ergibt sich eindeutig zu $r = (\,\rho_1\,) = (\,1\,)$.

Wegen $g_1(1,0,1) = 0$ und wegen der eindeutigen Existenz des Lagrangemultiplikators ist $(1,0,1)$ eine Flachstelle von f unter Nebenbedingung $g = 0$.

Wir lösen nun $N(1,0,1)^{\mathrm{t}}\,u = 0$ für $u \in \mathbf{R}^{3\times 1}$. Die erforderliche Umformung in Zeilenstufenform besteht nur aus einer Multiplikation der einzigen Zeile, nämlich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3&1&3&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&\frac{1}{3}&1&0 \end{array}\right) .$$

Wir erhalten gemäß Algorithmus die allgemeine Lösung

$$\{\, u \in \mathbf{R}^{3\times 1} \;:\; N(1,0,1)^{\mathrm{t}}\,u = 0 \,\} \;=\; \{\, \lambda_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda_1\,,\, \lambda_2 \,\in\, \mathbf{R} \,\}$$

und also $U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1\\ 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}$.

Auch jede andere Matrix, deren Spaltentupel eine Basis des Lösungsraums ist, kann hier als U Verwendung finden.

Weiter wird

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= f(x,y,z) - \rho_1\, g_1(x,y,z) \\ &= (x^2+y^2+xz+z^2+xyz) - 1\cdot(xy+3xz-3) \\ &= x^2+y^2-2xz+z^2+xyz-xy+3 \,. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\mathrm{H}_F(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & z-1 & -2+y\\ z-1 & 2 & x\\ -2+y & x & 2 \end{pmatrix} ,$$

und also

$$\mathrm{H}_F(1,0,1) \;=\; \begin{pmatrix} 2&0&-2\\ 0&2&1\\ -2&1&2 \end{pmatrix} .$$

Es wird

$$U^{\mathrm{t}}\,\mathrm{H}_F(1,0,1)\,U \;=\; \begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3}\\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix ist positiv definit, da $\mathrm{M}_1(\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3}\\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix}) = \frac{20}{9} > 0$ und $\mathrm{M}_2(\begin{pmatrix} \frac{20}{9} & \frac{7}{3}\\ \frac{7}{3} & 8 \end{pmatrix}) = \frac{37}{3} > 0$ ist.

Also ist $(1,0,1)$ eine lokale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g_1 = 0$.

Aufgabe II.4

In Standardnotation ist $a(x) = 1$ und $b(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(x)$.

In Standardnotation ist $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$.

Also ist $A(x) = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$.

Mit der Eulerschen Formel wird

$$\begin{array}{rcl}
F(x) & = & \int_0^x b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \int_0^x \mathrm{e}^t \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})\,\mathrm{d}t \\
& = & \frac{1}{2}\int_0^x (\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})})\,\mathrm{d}t \\
& = & \frac{1}{2}\big[\frac{1}{1+\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} + \frac{1}{1-\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})}\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big[\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{t(1+\mathrm{i})} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i})}\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big[\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^t(\cos(t) + \mathrm{i}\,\sin(t)) + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^t(\cos(-t) + \mathrm{i}\,\sin(-t))\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big[\frac{1-\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^t(\cos(t) + \mathrm{i}\,\sin(t)) + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{e}^t(\cos(t) - \mathrm{i}\,\sin(t))\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big[\,\mathrm{e}^t(\cos(t) - \mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(t))\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big[\,\mathrm{e}^t(\cos(t) + \sin(t))\big]_{t=0}^{x} \\
& = & \frac{1}{2}\big(\mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x)) - \mathrm{e}^0(\cos(0) + \sin(0))\big) \\
& = & \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}\ .
\end{array}$$

Als Lösung erhalten wir

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{A(x)}(F(x) + y_0) \;=\; \mathrm{e}^x(\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos(x) + \sin(x)) - \tfrac{1}{2}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}(\cos(x) + \sin(x)) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^x\ .$$

Aufgabe II.5

In Standardnotation ist $a = 1$, $b = 1$ und $c(x) = x^2$.

In Standardnotation ist $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und $y_0' = 1$.

Wir suchen eine spezielle Lösung der Form $\hat{y}(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu$ mit $\lambda,\ \mu,\ \nu \in \mathbf{R}$, welche die inhomogene Differentialgleichung $\hat{y}''(x) + 2\hat{y}'(x) + \hat{y}(x) = x^2$ erfüllt.

Es sollte also

$$x^2 \;\overset{!}{=}\; \hat{y}''(x) + 2\hat{y}'(x) + \hat{y}(x) \;=\; (2\lambda) + 2(2\lambda x + \mu) + (\lambda x^2 + \mu x + \nu) \;=\; \lambda x^2 + (4\lambda + \mu)x^1 + (2\lambda + 2\mu + \nu)x^0$$

sein.

Koeffizientenvergleich liefert (auch ohne Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme) bei x^2, daß $\lambda = 1$ ist, dann bei x^1, daß $\mu = -4\lambda = -4$ ist, dann bei x^0, daß $\nu = -2\lambda - 2\mu = 6$ ist.

Insgesamt ist also $\hat{y}(x) = x^2 - 4x + 6$.

Wir suchen die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $u'' + 2u' + u = 0$.

Es ist $a^2 = 1 = b$. Also ist für alle $r,\ s \in \mathbf{R}$

$$u(x) \;=\; \mathrm{e}^{-ax}(r + sx) \;=\; \mathrm{e}^{-x}(r + sx)$$

eine Lösung von $u'' + 2u' + u = 0$.

Wir bestimmen die Parameter r und s durch Einsetzen der Anfangswertbedingungen.

Es soll die Lösung

$$y(x) \;=\; \hat{y}(x) + u(x) \;=\; x^2 - 4x + 6 + \mathrm{e}^{-x}(r + sx)$$

von $y'' + 2y' + y = x^2$ die Anfangswertbedingungen erfüllen.

Zunächst wird

$$y'(x) \;=\; 2x - 4 - \mathrm{e}^{-x}(r + sx) + \mathrm{e}^{-x}s \;=\; 2x - 4 + \mathrm{e}^{-x}((s - r) - sx)\ .$$

Es sollte also

$$\begin{array}{rclcrcl} y_0 & = & 0 & \stackrel{!}{=} & y(0) & = & 6 + r \\ y_0' & = & 1 & \stackrel{!}{=} & y'(0) & = & -4 + s - r \end{array}$$

sein

Es ergibt sich (auch ohne Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme) aus der ersten Bedingung, daß $r = -6$ ist, aus der zweiten sodann, daß $s = 1 + 4 + r = -1$ ist.

Insgesamt erhalten wir die Lösung

$$y(x) \;=\; x^2 - 4x + 6 + \mathrm{e}^{-x}(-6 - x)$$

unserer inhomogenen Differentialgleichung $y''+2y'+y = x^2$ unter den gegebenen Anfangswertbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.