

Klausur

für bau, ernen, fmt, medtech, geod, mach, tema, umw, IuI, verf

Hinweise:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig**.
- Erlaubte Hilfsmittel: 4 eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen**.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 16. bis zum 20. April 2012 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite zur Veranstaltung bekanntgegeben. <http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1112/>
- Die Prüfungsergebnisse können voraussichtlich ab dem 10. April 2012 über das Online-Portal LSF der Universität Stuttgart erfragt werden. <https://lsf.uni-stuttgart.de/>

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.**Hinweis im Falle einer Wiederholungsprüfung**

Falls diese Prüfung für Sie eine Wiederholungsprüfung ist, so ist für bestimmte Fachrichtungen in dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung eingeschlossen, wenn das Ergebnis des schriftlichen Teils schlechter als die Note 4,0 ausfällt.

Wird in Ihrem Fall eine mündliche Nachprüfung erforderlich, so müssen Sie am Montag, dem 23. April, von 14 bis 18 Uhr bei Herrn Keller, Zimmer V57.8.157, **persönlich** einen Termin dafür vereinbaren. Eine individuelle Benachrichtigung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich gegebenenfalls zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit der Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtung an.

Hinweise. Die Ableitungen der wichtigsten Arcus-Funktionen lauten

$$\begin{aligned}\arctan(x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ \arccos(x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \arcsin(x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die archimedische Spirale wird durch

$$A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad A(\varphi) = (\varphi \cos \varphi, \varphi \sin \varphi)^T$$

parametrisiert. Für $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ begrenzt diese zusammen mit dem Geradenstück

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3\pi \leq x \leq -\pi, y = 0\}$$

ein ebenes Gebiet \bar{J} . Bestimmen Sie für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y) = (-y, x)^T$ die Zirkulation von g entlang des Randes von \bar{J} .

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Rotiert man das in der (x, z) -Ebene gelegene Rechteck $[1, 2] \times [0, 2]$ um die z -Achse, so entsteht eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Ausfluss des Vektorfelds

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad g(x, y, z) = (xz, 3yz^2 + y^2, zy - z^3)^T$$

durch den Rand von M .

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' - 3y = x.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(4 + x^2)y' = 4 + y^2, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: Den Definitionsbereich der Lösung müssen Sie nicht bestimmen.

Aufgabe 6: (9 Punkte)

Die 2π -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .
- Geben Sie für alle $x \in [-\pi, \pi]$ an, gegen welchen Wert die Fourier-Reihe von f im Punkt x konvergiert.
- Begründen Sie, ob f eine 2π -periodische Stammfunktion besitzt. Falls das so ist, geben Sie die Fourier-Reihe einer solchen Stammfunktion an.

Hinweise: Ausdrücke der Form $\sin(j\pi/2)$ bzw. $\cos(j\pi/2)$ müssen ausgerechnet werden. Ausdrücke der Form $1 \pm (-1)^j$ müssen nicht weiter vereinfacht werden ($j \in \mathbb{N}_0$).