

## Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

**Aufgabe 1.** *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt.  
Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben.
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert. Die Notenskala wird so berechnet, dass Sie eine Aufgabe als **optional** betrachten (und eventuell weglassen) können.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

VIEL ERFOLG!

---

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/11	/12	/11	/12	/70

## Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  für ausgewählte Werte von  $x$ :

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$e^x$	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
$e^{-x}$	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral  $\int_0^x \varphi(t) dt$  über die Normalverteilung  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ :

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für  $x = 1.23$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$ . Für  $x = 2.58$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$ .

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* ( $2+2+2+2+2+2 = 12$  Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

---

**Frage 2A.** Gilt  $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 g(x) dx$  für alle stetigen Funktionen  $f, g$ ?

*Begründete Antwort:*

---

**Frage 2B.** Sei  $K \subset \mathbb{C}$  ein Kompaktum mit stückweise glattem Rand  $\partial K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Welche Werte kann das komplexe Wegintegral  $\int_{\partial K} z^{-1} dz$  annehmen?

*Begründete Antwort:*

---

**Frage 2C.** Sie würfeln  $n$ -mal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Sei  $X_k$  die Augenzahl im  $k$ -ten Wurf und  $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$  der empirische Mittelwert der ersten  $n$  Würfe. Welchen Wert erhält man als Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(M_n < 4)$ ?

*Begründete Antwort:*

---

**Frage 2D.** Sei  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  stetig und  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar mit  $u(0) = v(0)$  sowie  $u'(x) = A(x)u(x)$  und  $v'(x) = A(x)v(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Folgt hieraus  $u = v$ ?

*Begründete Antwort:*

---

**Frage 2E.** Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos(kx)$  die Fourier-Reihe einer quadrat-integrierbaren Funktion?

*Begründete Antwort:*

---

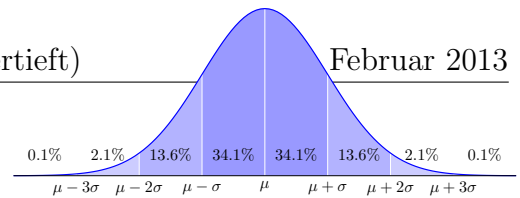
**Frage 2F.** Gilt für alle Polynome  $P(x, y), Q(x, y)$  die Vertauschbarkeit

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dy dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} dx dy \quad ?$$

*Begründete Antwort:*

---

**Aufgabe 3.** *Wahrscheinlichkeit* (3+4+4 = 11 Punkte)



**Frage 3A.** Zu zwei Ereignissen  $A$  und  $B$  sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = 0.8, \quad \mathbf{P}(A \cup B) = 0.6, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = 0.1.$$

Berechnen Sie hieraus  $\mathbf{P}(A)$  und  $\mathbf{P}(B)$ . Sind  $A$  und  $B$  stochastisch unabhängig?

*Rechnung & Antwort:*

**Frage 3B.** Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit  $\frac{1}{5}$  wird 2500 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $P$  ergeben sich mindestens 470 und höchstens 530 Treffer? Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung den Wert in Prozent auf 1% gerundet.

*Rechnung & Antwort:*

**Frage 3C.** Bei einem Chip mit zwei Millionen Transistoren fällt jeder mit Wahrscheinlichkeit  $10^{-6}$  unabhängig von allen anderen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $A$  fallen höchstens 2 Transistoren aus? Berechnen Sie den Wert in Prozent auf 1% gerundet. (Zur Näherung können Sie  $e^{-2} = 0.1353\dots$  nutzen. Eine Fehlerabschätzung wird nicht verlangt.)

*Rechnung & Antwort:*

**Aufgabe 4.** *Differentialgleichungen* ( $2+3+3+3 = 11$  Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen für reelle Funktionen  $u, v, w, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie ausnutzen.

---

**Frage 4A.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von  $u''(x) + u'(x) - 2u(x) = 0$ .

*Rechnung:*

Allgemeine Lösung  $u(x) =$

**Frage 4B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von  $v''(x) + v'(x) - 2v(x) = e^x$ .

*Ansatz & Rechnung:*

Partikulärlösung  $v(x) =$

**Frage 4C.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von  $w''(x) + w'(x) - 2w(x) = \cos(x)$ .

*Ansatz & Rechnung:*

Partikulärlösung  $w(x) =$

**Frage 4D.** Lösen Sie  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 3e^x + 10 \cos(x)$  mit  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 2$ .

*Ansatz & Rechnung:*

Lösung  $y(x) =$

**Aufgabe 5.** *Differentialgleichungssysteme* ( $4+1+4+3 = 12$  Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem  $y'(t) = Ay(t)$  mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

**Frage 5A.** Berechnen Sie  $u = Av$  und  $Au$  sowie  $Aw$ . Bestimmen Sie hieraus eine Basis des  $\mathbb{C}^4$  bestehend aus einer Hauptvektorkette der Länge 2 und zwei Eigenvektoren von  $A$ .

*Rechnung & Antwort:*

**Frage 5B.** Wie lautet demnach das charakteristische Polynom von  $A$ ? (in faktorisierten Form)

*Antwort:*



**Frage 5C.** Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem  $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$  der Differentialgleichung  $y' = Ay$  mit Anfangswerten  $y_1(0) = u$ ,  $y_2(0) = v$ ,  $y_3(0) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $y_4(0) = (0, 0, 0, 1)$ .

*Antwort:*

**Frage 5D.** Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor  $y(0) \in \mathbb{R}^4$  wählen und die zugehörige Lösung von  $y'(t) = Ay(t)$  verfolgen, welchen Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$  erwarten Sie?

*Antwort:*

**Aufgabe 6.** *Fourier-Reihen* (1+6+2+2 = 11 Punkte)

**Frage 6A.** Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $f(x) = 0$  für  $-\pi \leq x \leq 0$  und  $f(x) = x$  für  $0 < x < \pi$ . Skizzieren Sie  $f$  auf dem Intervall  $[-4\pi, 4\pi]$ .

*Skizze:*

**Frage 6B.** Berechnen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe  $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$  sowie die der reellen Fourier-Reihe  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ .

*Rechnung & Antwort:*

**Frage 6C.** Bestimmen Sie für jedes  $x \in \mathbb{R}$  den Grenzwert dieser Fourier-Reihe.

*Begründete Antwort:*

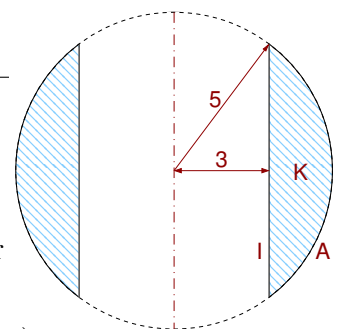
**Frage 6D.** Bestimmen Sie durch Auswertung dieser Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

*Rechnung & Antwort:*

**Aufgabe 7.** *Integration und Integralsätze* ( $3+3+3+3 = 12$  Punkte)

Der Körper  $K := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, x^2 + y^2 \geq 9 \}$  entsteht aus einer Kugel vom Radius 5 indem man mittig einen Zylinder vom Radius 3 ausbohrt. Er hat eine Innenwand  $I$  (mit  $x^2 + y^2 = 9$ ) und eine Außenwand  $A$  (mit  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ). Zudem sei  $f(x, y, z) = (x, y, z)$ .



**Frage 7A:** Parametrisieren Sie  $K$  in Zylinderkoordinaten  $\Phi(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ :

$$\boxed{\phantom{0}} \leq z \leq \boxed{\phantom{0}}, \quad \boxed{\phantom{0}} \leq r \leq \boxed{\phantom{0}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

**Frage 7B:** Berechnen Sie die Quellstärke von  $f$  auf  $K$ , also das Volumenintegral der Divergenz.

*Rechnung:*

**Frage 7C:** Berechnen Sie das Flussintegral von  $f$  durch die Innenwand  $I$  in  $K$  hinein.

*Rechnung:*

**Frage 7D:** Berechnen Sie das Flussintegral von  $f$  durch die Außenwand  $A$  aus  $K$  heraus.

*Rechnung:*