**Höhere Mathematik I/II Diplomvorprüfung 18. 3. 2003**

# 2. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **bau**, **immo**, **tpbau**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Alle sechs Aufgaben** zählen.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene DIN A4–Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 1 – 2** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Bei den **Aufgaben 3 – 6** sind nur die Ergebnisse verlangt. Tragen Sie diese in die dafür vorgesehenen Felder auf den Aufgabenblättern ein. In **Aufgabe 3** wird für jedes richtig gesetzte Kreuz ein Punkt, für jedes falsch gesetzte Kreuz ein Minuspunkt vergeben. Die Aufgabe als Ganzes wird jedoch nicht mit weniger als 0 Punkten bewertet werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 23. 04. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 7. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!!

**Hinweise für Wiederholer:**

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 02. 05. 2003 in Raum V57.7.346 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

**Aufgabe 1** (15 Punkte)**:** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**a)** Bestimmen Sie die Jordan–Normalform $J$ von $A$ und geben Sie eine Transformationsmatrix $T$ an, so daß $T^{-1}AT = J$ gilt.

**b)** Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems.

**c)** Wie lautet die Jordan–Normalform von $A^2$ ?

---

**Aufgabe 2** (15 Punkte)**:** Im $\mathbb{R}^3$ sei $E_1$ die Ebene durch die Punkte

$$A = (3, -2, 0), B = (1, -1, 2), C = (-1, 0, 1)$$

und $E_2$ die Ebene mit der Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

**a)** Bestimmen Sie eine Gleichungsdarstellung von $E_1$.

**b)** Berechnen Sie eine Parameterdarstellung von $E_1 \cap E_2$.

**c)** Sei $\pi$ die Projektion von $\mathbb{R}^3$ in Richtung des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} -2, 1, 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}$$

auf die Ebene $E_3$, die durch den Ursprung geht und senkrecht zur Projektionsrichtung ist. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\pi$ bzgl. des kanonischen Koordinatensystems $\{O; (1,0,0)^{\mathrm{t}}, (0,1,0)^{\mathrm{t}}, (0,0,1)^{\mathrm{t}}\}$.

**d)** Berechnen Sie $\pi(E_1 \cap E_2)$ und bestimmen Sie den Abstand von $E_1 \cap E_2$ vom Ursprung.

| **Name:** | | **Matrikel–Nr.:** | |
|---|---|---|---|

---

**Aufgabe 3** (7 Punkte)**:** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $S : Ax = b$ das zugehörige lineare Gleichungssystem mit $n$ Gleichungen und $n$ Unbekannten. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

| | | |
|---|---|---|
| $b = 0 \implies S$ ist lösbar | wahr ◯ | falsch ◯ |
| $\operatorname{Rg} A < n \implies S$ ist nicht eindeutig lösbar | wahr ◯ | falsch ◯ |
| $\det A > 0 \implies S$ ist eindeutig lösbar | wahr ◯ | falsch ◯ |
| $A$ symmetrisch $\implies S$ ist lösbar | wahr ◯ | falsch ◯ |
| Die Lösungen bilden einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ | wahr ◯ | falsch ◯ |
| Alle Eigenwerte von $A$ sind $\neq 0 \implies S$ ist eindeutig lösbar | wahr ◯ | falsch ◯ |
| $S$ ist unlösbar $\implies \det A = 0$ | wahr ◯ | falsch ◯ |

---

**Aufgabe 4** (8 Punkte)**:** Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{13x^2 + 22x + 15}{(x^2+2)(x^2-9)}$.

Kreuzen Sie den geeigneten Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung von $f$ an und berechnen Sie die Koeffizienten $a$, $b$, $c$ und $d$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f(x) = \dfrac{a+bx}{(x+2)^2} + \dfrac{c}{x+3} + \dfrac{d}{x-3}$ | ◯ | $f(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{(x+3)^2} + \dfrac{c+dx}{x^2+2}$ | ◯ |
| $f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2+2} + \dfrac{c}{x+3} + \dfrac{d}{x-3}$ | ◯ | $f(x) = \dfrac{a+bx}{x^2+2} + \dfrac{c+dx}{x^2+9}$ | ◯ |

$a =$ ☐ $b =$ ☐ $c =$ ☐ $d =$ ☐

Berechnen Sie eine Stammfunktion $F$ von $f$.

$F(x) =$ ☐

**Aufgabe 5** (8 Punkte)**:** Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. Falls kein Grenzwert existiert, tragen Sie bitte einen waagrechten Strich (-) in das vorgesehene Kästchen ein:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - x)}{\tan x} = \boxed{\quad\quad} \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \boxed{\quad\quad}$$

Geben Sie an, welche der folgenden Reihen absolut konvergieren (a), bedingt konvergieren (b) (d.h. die Reihe konvergiert, aber nicht absolut) bzw. divergieren (d).
Geben Sie in jedem Fall, in dem absolute Konvergenz vorliegt, den Reihenwert konkret an. Tragen Sie diesen bitte mit in das entsprechende Kästchen ein.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \boxed{\quad\quad} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!} = \boxed{\quad\quad}$$

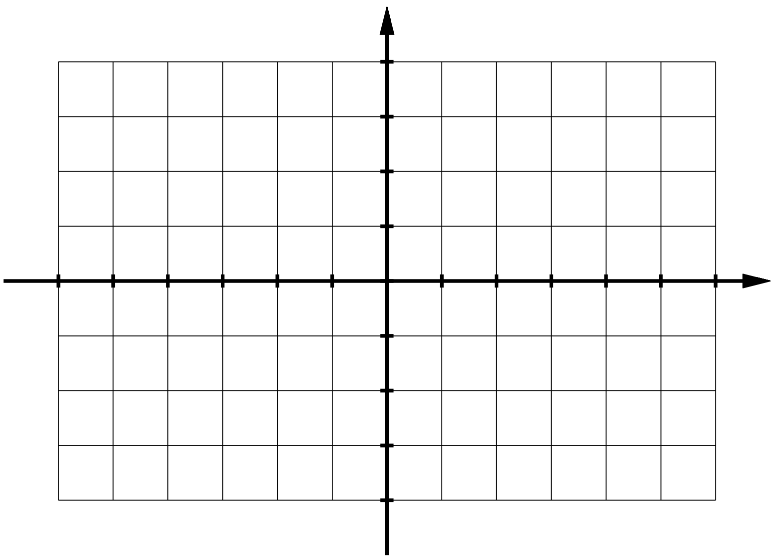
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n} = \boxed{\quad\quad} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{2^{2n}} = \boxed{\quad\quad}$$

---

**Aufgabe 6** (7 Punkte)**:** Skizzieren Sie die Menge

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z^2| \le 2 \quad \wedge \quad \mathrm{Im}(z^2) \le 0 \right\}$$

in der Gaußschen Zahlenebene.



Bestimmen Sie Realteil und Imaginärteil von $z_1 = (e^{i\frac{\pi}{4}})^3$ und von $z_2 = -1 + \dfrac{(1+i)^8}{i}$.

$\mathrm{Re}\, z_1 = \boxed{\quad\quad}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\, z_1 = \boxed{\quad\quad}$

$\mathrm{Re}\, z_2 = \boxed{\quad\quad}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\, z_2 = \boxed{\quad\quad}$