IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

Höhere Mathematik 3 **26. 2. 2014**

Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **kyb**, **mecha**, **phys**

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 180 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle neun Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: 10** handbeschriebene Seiten DIN A4 sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei jeder Aufgabe können 10 Punkte erzielt werden.
- Bei **Aufgabe 1** ist für jede der Aussagen anzukreuzen, ob diese richtig bzw. falsch ist.
- Bei den **Aufgaben 2–3** werden nur Endergebnisse gewertet. Diese sind in die dafür vorgesehenen Kästen einzutragen. Rechenwege werden nicht berücksichtigt.
- Bei den **Aufgaben 4–9** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **4. 4. 2014** im LSF bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich zwischen dem **7. 4. 2014** und **11. 4. 2014** in Raum V57.8.160 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Name:		Matrikelnummer:	

Aufgabe 1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(i) $\operatorname{div}(U\vec{F}) = (\operatorname{div}\vec{F})(\operatorname{grad} U)$

(ii) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} U = \vec{0}$

(iii) Der Fluss der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes durch eine Kugeloberfläche ist null.

(iv) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ mit einer stetigen Funktion f besitzt ein (skalares) Potential.

(v) Das Vektorfeld $\vec{F} = (y, -x, z)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein (skalares) Potential.

(vi) Das Arbeitsintegral jedes Vektorfeldes über einen geschlossenen Weg ist null.

(vii) Das Vektorfeld $\vec{F} = (x, 0, yz)^{\mathrm{t}}$ besitzt ein Vektorpotential.

(viii) Besitzt $\vec{F}$ ein Vektorpotential, so ist der Fluss von $\vec{F}$ durch jede Fläche null.

(ix) Die Differentialgleichung $ydx + xdy = 0$ ist exakt.

(x) Alle Lösungen der Differentialgleichung $u'' = -u$ sind periodisch.

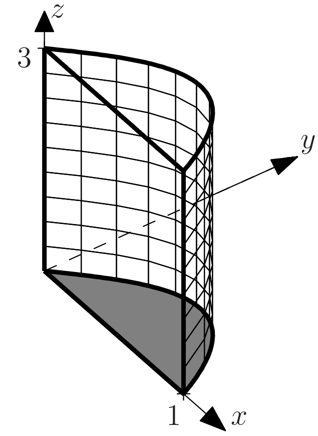
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

Aufgabe 2 (Angabe des Ergebnisses genügt)
Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ über

		Integral =
a) das Geradensegment	$C:\ t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t, t), \quad 0 \le t \le 1$	
b) das Dreieck	$D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ z = 0$	
c) den Würfel	$V = [0, 1]^3$	
d) den Zylinder	$Z:\ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \le 1,\ 0 \le z \le 1$	
e) den Mantel	$S:\ \varrho = 1,\ 0 \le z \le 1$ des Zylinders Z	

Aufgabe 3 Geben Sie für den Körper $V:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x(1 - x),\ 0 \le z \le 3$ und die Schnittfläche A (grau) von V mit der xy-Ebene die folgenden Größen an:

a) den Flächeninhalt von A	
b) das Volumen von V	
c) das Integral von $f(x, y, z) = z^2$ über V	
d) die y-Komponente des Schwerpunktes von V	
e) $\iiint_V (1 - y)\, dV$	



Aufgabe 4 Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = xy^2 \qquad \text{b) } y' = y + x^2 \qquad \text{c) } (x+y)dx + (x+1)dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 4u = \cos(3t)$$

a) eine partikuläre Lösung,
b) die allgemeine Lösung,
c) die Lösung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$ und deren Laplace-Transformierte.

Aufgabe 6 Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (y+z, yz, x^2)^{\mathrm{t}}$$

a) $\operatorname{div}\vec{F}$ und $\operatorname{rot}\vec{F}$,
b) den Fluss durch die Kreisscheibe

$$D : \, x^2 + y^2 \leq 1, \, z = 0$$

nach unten,
c) den Fluss durch die Halbkugelschale

$$S : \, r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1, \, z \geq 0$$

nach außen.

Aufgabe 7 Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (3 - 2y, 3y^2 - 2x)^{\mathrm{t}}$$

ein Potential und berechnen Sie

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{sowie} \quad \int_C \vec{F} \times d\vec{r}$$

für den Weg

$$C : \, t \mapsto \vec{r}(t) = (t, t^2), \, 0 \leq t \leq 1.$$

Aufgabe 8 Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = 1 + |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, und bestimmen Sie
a) Real- und Imaginärteil der Fourier-Transformierten der Funktion

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } -\pi \leq x < \pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k und die reellen Fourier-Koeffizienten a_k und b_k der 2π-periodischen Fortsetzung von f,
c) den Wert der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k$.

Aufgabe 9 Bestimmen Sie die Möbius-Transformation, die die Punkte 0, $1 + \mathrm{i}$ und $2\mathrm{i}$ auf 0, 1 und ∞ abbildet. Geben Sie die Bilder von $z = \mathrm{i}$ und $z = \infty$ sowie eine geometrische Beschreibung der Bildmengen der Geraden

$$g_1 : \, t \mapsto \mathrm{i}t, \quad g_2 : \, t \mapsto \mathrm{i} + t$$

$(t \in \mathbb{R})$ an.