



Höhere Mathematik 3

Herbst 2014

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

- (i) $\operatorname{rot}(2\vec{F}) = 2(\operatorname{rot} \vec{F})$
- (ii) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$
- (iii) $\iint_S \operatorname{grad} U \cdot d\vec{S} = 0$ für jede geschlossene Fläche S
- (iv) $\vec{F} = (0, z, 0)^t$ besitzt ein skalares Potential.
- (v) Jedes radiale Vektorfeld $f(r)\vec{e}_r$ besitzt ein Vektorpotential.
- (vi) Das Arbeitsintegral ist für jedes Vektorfeld wegunabhängig.
- (vii) Das Integral von $f(r) = 1/r$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, über die Einheitskugel existiert.
- (viii) Der Gradient einer radialsymmetrischen Funktion ist parallel zu \vec{e}_r .
- (ix) Die Differentialgleichung $u'' = 2\pi u$ besitzt periodische Lösungen, die nicht trivial sind.
- (x) Die Differentialgleichung $x dx + y dy = 0$ ist exakt.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
richtig										
falsch										

Lösung zu Aufgabe 1

- (i) richtig
- (ii) richtig
- (iii) falsch
- (iv) falsch
- (v) falsch
- (vi) falsch
- (vii) richtig
- (viii) richtig
- (ix) falsch
- (x) richtig

Aufgabe 2

Geben Sie den Wert des Integrals der Funktion $f = x + 2z$ über

a) das Geradensegment $C : t \mapsto \vec{r}(t) = (2t, 1, 3), 0 \leq t \leq 1$

b) das Quadrat $Q : x = 1, 0 \leq y, z \leq 3$

c) das Prisma $P : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 2$

d) die Halbkugel $H : r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$

e) die Halbkugelschale $S : r = 1, z \geq 0$

an.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\int_0^1 (2t + 2 \cdot 3) |(2, 0, 0)| dt = 2 + 12 = 14$

b) $\int_0^3 \int_0^3 (1 + 2z) dy dz = \int_0^3 3 + 6z dz = 9 + [3z^2]_0^3 = 36$

c)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^2 (x + 2z) dz dy dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x + 4) dy dx \\ &= \int_0^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx = -2/3 - 1 + 4 = 7/3 \end{aligned}$$

d) Kugelkoordinaten \leadsto

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (r \sin \vartheta \cos \varphi + 2r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr$$

Symmetrie \leadsto

$$0 + [r^4/4]_0^1 \cdot [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = \pi/2$$

e) Symmetrie \leadsto

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2 \cos \vartheta \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = [\sin^2 \vartheta]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = 2\pi$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\text{a) } y' = -2y + e^x \quad \text{b) } y' = \frac{x^2}{1+y} \quad \text{c) } xdx + (y-2)dy = 0$$

die allgemeine Lösung sowie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = 1$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) linear $\leadsto y = y_h + y_p$

$$y_h = ce^{-2x}$$

Ansatz $y_p = \gamma e^x \leadsto$

$$\gamma = -2\gamma + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 1/3$$

allgemeine Lösung $y = ce^{-2x} + e^x/3$

$$y(0) = 1 \implies c = 2/3$$

b) separabel

$$(1+y)y' = x^2$$

Integration \leadsto

$$\frac{1}{2}(1+y)^2 = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Auflösen nach $y \leadsto$ allgemeine Lösung

$$y = -1 \pm \sqrt{2x^3/3 + 2c}$$

$$y(0) = 1 \implies c = 2 \text{ und } y = -1 + \sqrt{2x^3/3 + 4}$$

c) exakt, da $\partial_y x = 0 = \partial_x (y-2)$

Integration \leadsto

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 = c$$

Auflösen nach $y \leadsto$ allgemeine Lösung

$$y = 2 \pm \sqrt{2c - x^2}$$

$$y(0) = 1 \implies c = 1/2 \text{ und } y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$u'' + 3u' + 2u = f(t)$$

- a) die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($f = 0$),
 - b) die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu den Anfangsbedingungen $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$,
 - c) eine partikuläre Lösung für $f(t) = e^t$.
-

Lösung zu Aufgabe 4

a) charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2$$

Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

allgemeine Lösung

$$u = ae^{-2t} + be^{-t}$$

b) Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= 1 \implies a + b = 1 \\ u'(0) &= 0 \implies -2a - b = 0 \end{aligned}$$

also $b = -2a$ und

$$a = -1, \quad b = 2$$

c) Ansatz $u = ce^t \rightsquigarrow$

$$(c + 3c + 2c)e^t = e^t,$$

d.h. $c = 1/6$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{F} = (y, xz, 2z)^t$

a) $\operatorname{div} \vec{F}$ und $\operatorname{rot} \vec{F}$

sowie für den Körper $K : x^2 + y^2 \leq 1 - z, 0 \leq z \leq 1$ mit Mantel M , Grundfläche D und nach außen gerichteter Normalen

$$\text{b) } \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{c) } \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad \text{d) } \iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Lösung zu Aufgabe 5

a) Divergenz und Rotation:

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 2 = 2, \quad \operatorname{rot} \vec{F} = (0 - x, 0 - 0, z - 1)^t$$

b) $\vec{F}|_D = (y, 0, 0)^t \perp d\vec{S} \implies$

$$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

c) Satz von Gauß \implies

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iiint_K \operatorname{div} \vec{F} \, dK - \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot \operatorname{vol}(K) \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)r \, dr = 4\pi(1/2 - 1/4) = \pi \end{aligned}$$

d) Satz von Stokes \implies

$$\iint_M \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit $C : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ der Randkurve von M

\implies

$$\iint_M \dots = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -\pi$$

Aufgabe 6

Für welchen Wert α_* des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$\vec{F}_\alpha = (-3y, \alpha x + 2y)^t$$

ein Potential und wie lautet dieses? Berechnen Sie für den Weg $C : t \mapsto (t, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\text{a) } \int_C \vec{F}_{\alpha_*} \cdot d\vec{r} \qquad \text{b) } \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}.$$

Lösung zu Aufgabe 6

Potential:

$$\text{rot } \vec{F}_\alpha = \partial_x(\alpha x + 2y) - \partial_y(-3y) = \alpha + 3$$

$$\implies \alpha = -3$$

Integration nach x und y

$$\begin{aligned} U_x &= -3y \implies U = -3xy + g(y) \\ U_y &= -3x + 2y = -3x + g'(y) \implies g(y) = y^2 + c, \end{aligned}$$

d.h. $U = y^2 - 3xy + c$

Arbeitsintegrale:

für $\alpha_* = -3$,

$$\int_C \vec{F}_{\alpha_*} \cdot d\vec{r} = U(1, 1) - U(0, 0) = -2$$

für $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -3t^2 \\ t + 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -t^2 + 4t^3 dt = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$