Hinweis:

- Auf dieser Klausur können bis zu 80 Punkte erreicht werden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden alle Aufgaben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- In den Aufgaben 1 bis 4 sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Für die Aufgaben 5 und 6 können die Tabellen auf dem ausgeteilten Beiblatt benutzt werden.
- In den Aufgaben 5 bis 6 werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Die Prüfungsergebnisse werden vorausssichtlich ab 10.04.2015 über das Online-Portal LSF bekanntgegeben. https://lsf.uni-stuttgart.de
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich am 14.04.2015 statt. Der genaue Termin wird auf der Homepage dieser HM3-Vorlesung bzw. auf der E-Learning Platform ILIAS bekanntgegeben. https://ilias3.uni-stuttgart.de

Hinweise für Wiederholer: Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0. Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bei der Klausureinsicht oder bis zum 24.04.2015 bei Frau Maderer (Raum V57.7.346) einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht. Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Firma produziert genau zwei Typen von Glühbirnen, welche hier mit A bzw. B bezeichnet seien. Beide Typen sind identisch, haben jedoch unterschiedliche Lebenserwartungen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne vom Typ A mehr als 1000 Stunden brennt ist 0,9. Für Typ B ist diese Wahrscheinlichkeit 0,3. Ein Drittel aller produzierten Glühbirnen der Firma ist vom Typ A.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig ausgewählte Glühbirne mehr als 1000 Stunden brennt?

b) Eine Birne dieser Firma glüht mehr als 1000 Stunden bis zum Defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Glühbirne vom Typ A ist?

c) Die Anzahl der Stunden, welche eine Glühbirne vom Typ A als Lebenserwartung besitzt, folgt einer Exponentialverteilung mit Parameter λ. Berechnen Sie diesen Parameter λ. (Es ist nicht nötig das Ergebnis in eine Dezimalzahl umzuwandeln.)

Aufgabe 2 (17 Punkte)

a) Man berechne die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$x_1' = 5x_1 + 7x_2 + e^{4t} \qquad x_2' = -2x_1 - 4x_2 - e^{4t}.$$

b) Man bestimme die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems $X' = AX$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Man gebe auch explizit diejenige Lösung X_s an, welche die Anfangsbedingung $X_s(0) = \begin{pmatrix} 1, & -4, & -2 \end{pmatrix}^\intercal$ erfüllt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \pi & \text{für } x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x & \text{für } x \in [0, \pi) \end{cases},$$

soll in eine Fourier-Reihe $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ entwickelt werden.

a) Man berechne die Koeffizienten a_0, a_n und b_n für $n \geq 1$.

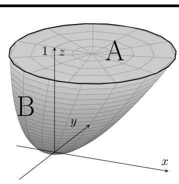
b) Für welche $x \in [-\pi, \pi)$ konvergiert die Fourier-Reihe S_f gegen die Funktion f? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Man bestimme die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$, indem man f an einer geeigneten Stelle x_0 auswertet.

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Betrachten Sie den Vollkörper

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2rt\cos(s) + t^2 \\ rt\sin(s) \\ t^2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{r} r \in [0,1] \\ t \in [0,1] \\ s \in [-\pi, \pi] \end{array} \right\}$$



mit der Deckfläche A in der Ebene $\{z = 1\}$ und der Mantelfläche B.

a) Parametrisieren Sie A und B und bestimmen Sie eine Flächennormale N von A bezüglich Ihrer gewählten Parametrisierung.

b) Zeigen Sie: Die Fläche von A ist 2π. Berechnen Sie nun das Kurvenintegral $\int_{\partial A} Y \cdot d\vec{r}$ mit $Y := \begin{pmatrix} yz^2 + x^2, & yz, & xz + y^2 \end{pmatrix}^\intercal$. Orientieren Sie dabei ∂A gegen den Uhrzeigersinn um die z-Achse. Welchen Integralsatz verwenden Sie?

c) Berechnen Sie das Volumenelement von V bezüglich der Koordinaten (r, s, t) und zeigen Sie $\int_V z \,\mathrm{dvol} = \frac{2}{3}\pi$.

d) Bestimmen Sie den Fluss von $F(x, y, z) := \begin{pmatrix} z^2, & x + yz, & y \end{pmatrix}^\intercal$ durch die Oberfläche von V nach Innen.

e) Warum kann es kein Vektorfeld f mit $\operatorname{rot} f = F$ geben?

Name: **Matrikel-Nr.:**

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine gezinkte Münze zeigt mit 60% Wahrscheinlichkeit Kopf. Die Münze wird 150 mal geworfen. Bezeichne X die Zufallsvariable, wieviele Würfe "Kopf" ergeben.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis $X = k$:

$$P(X = k) = \boxed{}.$$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.

$$E(X) = \boxed{}, \mathrm{Var}\,(X) = \boxed{}$$

c) Sie wetten darauf, dass die Münze mehr als 80 mal Kopf zeigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p gewinnen Sie diese Wette? Approximieren Sie durch eine geeignete Normalverteilung. Geben Sie das Ergebnis ohne zu runden an.

$$p = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie das maximale k_{max} so, dass Ihre Gewinnchance bei einer Wette auf mindestens k mal Kopf bei über 90% liegt. Geben Sie zur Kontrolle den aus der Tabelle abgelesenen Wert b für die standardisierte Verteilung an.

$$b = \boxed{}, k_{\text{max}} = \boxed{}$$

Aufgabe 6 (14 Punkte)

a) Geben Sie für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$$

das charakteristische Polynom an.

$p(s) =$

Bestimmen Sie die Nullstellen von $p(s)$ und deren Vielfachheit.

Wie lautet die allgemeine reelle Lösung obiger Differentialgleichung.

b) Finden Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(t) - y(t) = \cos(t).$$

c) Transformieren Sie das Anfangswertproblem

$$y^{(3)}(t) - y(t) = \cos(3t)\mathrm{e}^{-2t}, \quad y''(0) = 1, y'(0) = 0, y(0) = 1$$

in den Bildbereich der Laplace-Transformation:

d) Geben Sie eine Lösung für das folgende Anfangswertproblem an.

$$y' = 2x\left(1 + y^2\right), \quad y(1) = 0$$