Klausur zur Höheren Mathematik III

für die Fachrichtungen: kyb, mecha, phys

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel: 10 DIN A4 Seiten eigenhändig handbeschrieben**.
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handys und Computer nicht erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- **Alle 6 Aufgaben** zählen.
- Bei **allen Aufgaben** sind sämtliche Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen Extrablätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab **01. Oktober 2015** über das Online–Portal LSF (`https://lsf.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, werden ab **01. Oktober 2015** nähere Informationen bezüglich der mündlichen Nachprüfung auf der Homepage zu HM III–Pöschel (`http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Poeschel-WS1415/`) finden.

Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

bitte Rückseite beachten

Folgende Ableitungen und Funktionswerte könnten hilfreich sein ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in (0, \infty)$):

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\, x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\, b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leqq 1\}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y)$$

durch Einführen von Polarkoordinaten.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{e}^{-x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

indem Sie die Integrationsreihenfolge geeignet vertauschen.

(c) Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(x,y,z) = (3z, z\cos(yz), 3x + y\cos(yz))^\top.$$

Berechnen Sie $\operatorname{rot} g$ sowie das Wegintegral

$$\oint_\gamma g \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

wobei γ die Randlinie des Einheitskreises in der Ebene mit $z = 0$ ist.

(d) Es sei $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$h(x,y,z) = \left(\frac{1}{y^2+z^2+1} - 2x, y + x^3 z^5, x^3 - z\right)^\top.$$

Berechnen Sie $\operatorname{div} h$ sowie das Oberflächenintegral

$$\iint_S h \cdot \mathrm{d}\vec{O},$$

wobei S die Oberfläche der Einheitskugel ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y = y(x)$ von
$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}, \quad x > 0.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems
$$y' = \sin(x)y^2, \quad y(0) = -1,$$
und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden homogenen Differentialgleichung in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ an.
$$y'' - 6y' + \alpha y = 0.$$

(d) Geben Sie jeweils eine partikuläre Lösung für $y'' - 6y' - 7y = f(x)$ an, wenn

i) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, ii) $f(x) = 25\cos(x)$, iii) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 25\cos(x)$.

Hinweis: Auf der Rückseite des Deckblattes befindet sich eine Tabelle mit elementaren Stammfunktionen und Ableitungen sowie speziellen Werten der trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems
$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} y$$
sowie diejenige Lösung mit $y(0) = (1,1,1)^\top$.

(b) Ein komplexes Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei gegeben durch
$$\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}, \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})x} \right\}.$$
Geben Sie ein zugehöriges reelles Fundamentalsystem an (in der Darstellung soll die imaginäre Einheit nicht mehr auftauchen).

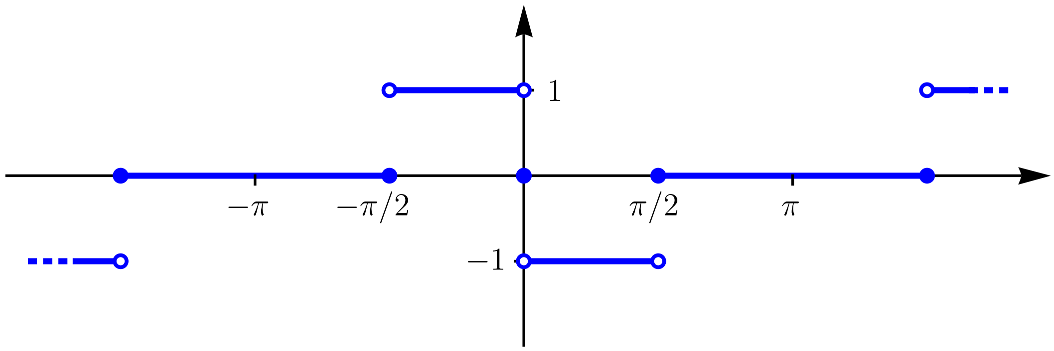
(c) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Weiterhin seien zwei Lösungen y_1, y_2 des zugehörigen linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$ bekannt. Geben Sie die Eigenwerte von A (mit Vielfachheit) an, wenn

i) $y_1(x) = (17,4,1)^\top \mathrm{e}^{-7x}$, $\quad y_2(x) = (0, \sin(3x), \cos(3x))^\top \mathrm{e}^{2x}$,

ii) $y_1(x) = (1,0,-1)^\top$, $\quad y_2(x) = (0,1,1)x\mathrm{e}^{-4x}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze den folgenden Graphen.



i) Welche Fourierkoeffizienten dieser Funktion sind auf jeden Fall 0?
Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f sowohl in reeller als auch in komplexer Form.

iii) In welchen Punkten $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe *nicht* gegen $f(x)$?
Welche Werte hat sie stattdessen in diesen Punkten?

(b) Geben Sie die reellen und komplexen Fourierkoeffizienten der folgenden 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an:

i) $f(x) = \sin(5x) + 3\cos(5x)$

ii) $f(x) = \sin^2(3x) - \frac{1}{2}$

Hinweis: Teilaufgabe **(b)** kann gelöst werden, ohne eine einzige Integration durchzuführen. Die Formeln $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ und $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ könnten dabei hilfreich sein.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Die analytische Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Schreiben Sie $f = f(z)$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, d.h. ohne Verwendung von x, y oder $\overline{z}$.

(b) Für eine analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gelte $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$. Welchen Wert nimmt f an der Stelle 1 an? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^2 + ay^2 - 2ax + 3y$, $a \in \mathbb{R}$ sei Realteil einer analytischen Funktion. Welchen Wert muss a annehmen?

(d) Berechnen Sie

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^3 + \mathrm{e}^{-z}}{(z-2)^4}, 2\right).$$

(e) Berechnen Sie

$$\oint_\gamma \frac{1}{(z^4 + 9)(z - \mathrm{i})z} \,\mathrm{d}z,$$

wobei γ die einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Randlinie des Kreises um den Ursprung mit Radius $3/2$ ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lösung der Transportgleichung $u_t = 3u_x$ und erfülle $u(0, x) = x$. Bestimmen Sie $u(2, x)$.

(b) Gegeben ist das Randwertproblem

$$u_t = u_{xx} - u, \quad u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

i) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(t, x) = v(t)w(x)$ gewöhnliche Differentialgleichungen für v und w.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung w, die die Randbedingungen erfüllt.

iii) Geben Sie die allgemeine Lösung u des Randwertproblems an.

iv) Bestimmen Sie diejenige Lösung u mit

$$u(0, x) = \sin(x) + 3\sin(5x), \quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$