

Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 24.10.2016 über das Online-Portal LSF (<https://lsf.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Die Klausureinsicht findet voraussichtlich in der Woche vom 24.10.2016 bis 28.10.2016 statt. Details hierzu werden auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben.
(<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr-WS1516/>)

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom **31.10.2016** bis **02.11.2016** jeweils zwischen 10:00 bis 12:00 Uhr mit Fernando Gaspoz (Raum V57.7.154) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{e^{-y}}{2} \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - y' - 2y = 2x + e^{2x}.$$

Aufgabe 3 (9 Punkte) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix} y.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems zur Anfangsbedingung

$$v = y(0) = (1, 0, 0)^T$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Sei F das Rotationsparaboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

(a) Wir betrachten ebene Polarkoordinaten (r, φ) und die Parametrisierung

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \\ z(r, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ? \end{pmatrix}$$

Wie ist z in Abhängigkeit von (r, φ) zu definieren um eine Parametrisierung von F zu erhalten?
Aus welchem Bereich müssen dabei r und φ gewählt werden?

(b) Berechnen Sie die Flächennormale

$$N(r, \varphi) := \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \quad (1)$$

und deren Länge $\|N(r, \varphi)\|$.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $|F|$.

Aufgabe 5 (10 Punkte) Es ist die 2π -periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) - 1, & x \in [-\pi, 0) \\ 1 + \sin(x), & x \in [0, \pi) \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi)$.

(b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von f .

(c) Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert der Fourierreihe.

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y)) \\ \cos(x) \cdot \cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y)) \\ \sin(x) \cdot \sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y)). \end{aligned}$$