Modulprüfung zur Mathematik für Informatiker und Softwaretechniker

Prof. Dr. W. Rump, Dr. E. Nava-Yazdani, K. Heil 19. August 2016

Lösung zu Aufgabe 1 (je 1 Punkt): Bestimmen Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen, indem Sie jeweils w (wahr) oder f (falsch) eintragen.

1. Die Ableitung einer rationalen Funktion ist eine rationale Funktion. $\boxed{\text{w}}$

2. Es gibt ein $r \in \mathbb{R}$, mit $3 + 2i = re^{2i}$. $\boxed{\text{f}}$

3. Die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. $\boxed{\text{f}}$

4. Die Gleichung
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{p} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
besitzt für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ eine Lösung $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$. $\boxed{\text{w}}$

5. Jede reelle symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. $\boxed{\text{w}}$

6. Die Gleichung $z = x^2 + y^2$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, beschreibt die Mantelfläche eines Kegels. $\boxed{\text{f}}$

7. Für alle differenzierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$. $\boxed{\text{w}}$

8. Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist symmetrisch. $\boxed{\text{f}}$

Lösung zu Aufgabe 2 (je 2 Punkte): Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\ln(1+n^2)}{\sqrt{n^4+1}} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k} \right) = \boxed{3/2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x}{x+3\sin x} = \boxed{1/4}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx = \boxed{14/9}$

d) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \boxed{1/2}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^\pi x\sin y\,dydx = \boxed{1}$

Lösung zu Aufgabe 3 (je 2 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion mit der Funktionsgleichung

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+xy \\ 3x^2+y \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen die die Jacobi-Matrix Df der Funktion f:

$$Df(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} 2+y & x \\ 6x & 1 \end{pmatrix}}$$

2. Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass die Jacobi-Matrix von f an der Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann invertierbar ist, wenn $y \neq g(x)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g:

$$g(x) = \boxed{6x^2-2}$$

Lösung zu Aufgabe 4 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 1 + e^{x^2+y^2-2x}.$$

1. Bestimmen Sie den Gradienten ∇f und die Hesse-Matrix Hf der Funktion f:

$$\nabla f(x,y) = \boxed{2e^{x^2+y^2-2x}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}}\ , \quad Hf(x,y) = \boxed{2e^{x^2+y^2-2x}\begin{pmatrix} 1+2(x-1)^2 & 2y(x-1) \\ 2y(x-1) & 1+2y^2 \end{pmatrix}}$$

2. Die Funktion f besitzt ein absolutes Minimum an der Stelle M. Bestimmen Sie:

$$M = \boxed{(1{,}0)}$$

3. Bestimmen Sie das quadratische Taylorpolynom T_2 von f um die Entwicklungsstelle $(0,0)$:

$$T_2(x,y) = \boxed{2 - 2x + 3x^2 + y^2}$$

Lösung zu Aufgabe 5 (je 2 Punkte): Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 3y = 2\sin x - 4\cos x.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

$$y_h = \boxed{ae^x + be^{3x}}$$

b) Eine partikuläre Lösung y_p der Differentialgleichung lautet:

$$y_p = \sin x.$$

Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 5$ erfüllt:

$$y = \boxed{\sin x + e^x + e^{3x}}$$

Lösung zu Aufgabe 6 (3 +6 Punkte):

(a)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{6}$$

(b)

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$f' = b - (\vec{b}\cdot\vec{e})\ \vec{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-3\\2\\2-3\end{pmatrix}$$

$$f = |f'|^{-1} f' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 7 (3 + 6 Punkte):

(a)

$$\det(H - xE) = (2-x)^2(1-x) - 4(1-x) = (1-x)\left((x-2)^2 - 4\right) = x(1-x)(x-4)$$

Also sind die Eigenwerte $\{0, 1, 4\}$.

(b)

$(x = 0)$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \implies v_3 = 0 \wedge v_1 = -v_2 \implies v = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$(x = 4)$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right. \implies v_3 = 0 \wedge v_1 = v_2 \implies v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$(x = 1)$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \implies v_1 = -2v_2 \wedge v_3 = 3v_2 \implies v = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$
