



HM 3 aer/mawi  
Modulprüfung  
07.09.2017

Name:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	$\Sigma$	Note
Punkte:								

**Hinweis:**

- Auf dieser Klausur sind maximal 76 Punkte zu erreichen.
- Als Hilfsmittel sind ausschließlich fünf eigenhändig und doppelseitig beschriebene DIN-A4 Blätter zugelassen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Die Klausureinsicht ist voraussichtlich in der ersten Vorlesungswoche. Den genauen Termin finden Sie zeitnah auf der ILIAS Seite zur Vorlesung.
- Die Klausurergebnisse werden über das LSF bekannt gegeben.

**Aufgabe 1** (4 + 4 + 4 + 4 Punkte).

Lösen Sie die folgenden kurzen Aufgaben.

- a) **Wo ist etwas passiert? Wer meldet? Was ist passiert? ...** Die Wahrscheinlichkeit eines Feuers in der Uni ist gering, sagen wir 0.1% jeden Tag. Im Brandfall wird mit 98%iger Sicherheit Alarm ausgelöst. Leider gibt es an 0.5% aller feuerfreien Tage Fehlalarm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit a geht der Feueralarm los? Mit welcher Wahrscheinlichkeit b brennt es, wenn Sie den Alarm hören?
- b) **Atomkraft? Ja bitte!** Die Lebensdauer eines radioaktiven Teilchen genüge einer Exponentialverteilung mit Dichte  $e^{-\lambda t}$ . Die Halbwertszeit sei 15 Jahre. Bestimmen Sie den Parameter  $\lambda$ . Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Teilchen nach 30 Jahren zerfallen?
- c) **Integrationsbemühung** Wir betrachten folgende Differentialgleichung:

$$y' (3x^2 - y) = -2xy$$

Prüfen Sie, ob diese exakt ist. Falls nicht, finden Sie einen integrierenden Faktor  $\nu(y)$ .

- d) **Am Anfang war das Problem** Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = \frac{3x^2 - 2y^2}{2xy} \quad y(1) = 1.$$

Können Sie sich noch daran erinnern, dass so eine ähnliche Differentialgleichung in der Vorlesung behandelt wurde?

**Aufgabe 2. Kriegen Sie die Kurve!** [3 + 5 + 4 Punkte]

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$y\partial_x u - (x + 2y)\partial_y u + \partial_z u = 0$$

- a) Wie lautet das Gleichungssystem der Charakteristiken?
- b) Bestimmen Sie die charakteristische Kurve  $c(t)$  zum Anfangswert  $c(0) = (x_0, y_0, 0)$ .
- c) Finden Sie die Lösung  $u$  der partiellen Differentialgleichung welche  $u(x, y, 0) = x + y$  erfüllt.

**Aufgabe 3. Zu welchem Fluß kommen Sie?** [2 + 3 + 4 + 4 + 3 Punkte]

Wir betrachten die Flächenparametrisierung

$$F(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 1 - r^2 \end{pmatrix}$$

mit  $r \in [0, 1]$  und  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

- a) Skizzieren Sie die durch  $F$  parametrisierte Fläche und deren Rand.
- b) Berechnen Sie den Normalenvektor  $N_F$ . Zeigt dieser nach innen oder nach außen?

c) Berechnen Sie das Flußintegral des Vektorfeldes

$$Y := \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ 4(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

durch die von  $F$  parametrisierte Fläche nach Außen.

d) Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes

$$X := \begin{pmatrix} -y x^2 \\ x y^2 \\ \frac{1}{4} z y \end{pmatrix}$$

längs der Kreislinie  $\gamma(\varphi) := (\cos(\varphi), \sin(\varphi), 0)$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

e) Berechnen Sie die Rotation von  $X$  und vergleichen Sie diese mit  $Y$ . Interpretieren Sie so die Ergebnisse aus c) und d) mit Hilfe des Satzes von Stokes. (Alternativ, falls Sie Aufgabenteil d) nicht lösen konnten, berechnen Sie das gesuchte Arbeitsintegral direkt mit Hilfe des Satzes von Stokes und Teil c.)

---

#### Aufgabe 4. Ich wünsche mir eine Welt ohne Ableitungen [12 Punkte]

Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$  mit Hilfe der Laplace-Transformation. Vergessen Sie die Probe nicht!

---

#### Aufgabe 5. Sprunghafte Entwicklung [2 + 5 + 3 Punkte]

Es ist die  $2\pi$ -periodische gerade Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

gegeben.

a) Skizzieren Sie  $f$  auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi)$ .

b) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von  $f$ .

c) Werten Sie die Fourier-Reihe von  $f$  bei  $x_0 = 0$  aus und bestimmen Sie so den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l+1}.$$

---

#### Aufgabe 6. Nicht auf den Kopf gefallen [3 + 3 + 4 Punkte]

Eine gezinkte Münze zeigt mit 80% Wahrscheinlichkeit Kopf. Die Münze wird 400 mal geworfen.

a) Wie groß sind Erwartungswert  $E(X)$ , Varianz  $V(X)$  und Streuung  $\sigma(X)$  der Anzahl  $X$  der Würfe welche Kopf zeigen?

Wir approximieren im Folgenden durch eine geeignete Normalverteilung. (Eine Tabelle für die Standard-Normalverteilung finden Sie unten.)

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 312 und höchstens 324 mal Kopf fällt (gerundet auf ein ganzes Prozent) ?

c) Sie wetten darauf, dass die Münze mindestens  $k$  mal Kopf zeigt und wollen ihre Wette mit mindestens 99.8% Wahrscheinlichkeit gewinnen. Was ist der maximale Wert für  $k$ , den Sie wählen können?

Tabelle für das Integral  $\int_0^x \phi_{0,1}(t)dt$  über die Standardnormalverteilung  $\phi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$ :

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900