IMNG, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

Prof. Dr. K. Höllig

**Höhere Mathematik I–II** **Diplomvorprüfung** **1. 9. 2003**

# 1. Klausur

für Studierende der Fachrichtungen **el**, **geod**, **kyb**, **tpel**

**Bitte unbedingt beachten:**

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten. Verlangt und gewertet werden **alle sieben Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 25 handbeschriebene Blätter sowie Zeichenmaterial. Nicht erlaubt sind insbesondere Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengeräte.
- Bei den **Aufgaben 3–7** sind alle Lösungswege und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate Blätter und beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In den beiden Klausuren können zusammen maximal **120 Punkte** erreicht werden.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 6. 10. 2003 im NWZ II, Pfaffenwaldring 57, 8. Stock, durch Aushang bekanntgegeben.

  Viel Erfolg!

**Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung für bestimmte Fachrichtungen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen sich bis zum 14. 11. 2003 in Raum V57.8.162 einen Termin hierfür geben lassen. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich ggf. zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

---

**Aufgabe 1** (5 Punkte): Geben Sie ohne Begründung an, ob die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

**a)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0\,,$ für Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

**b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ konvergiert.

**c)** Die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix sind reell.

**d)** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq |z|\,,$ für $z \in \mathbb{C}$.

**e)** $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x_1}\big(\operatorname{grad} f\big) = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f\right)$, für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

---

**Aufgabe 2** (5 Punkte): Berechnen Sie (Angabe des Ergebnisses genügt):

**a)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{2^n+n}$ **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{1-2n}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$

---

**Aufgabe 3** (10 Punkte):

**a)** Berechnen Sie für

$$z = \frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$$

die Werte $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ und $\arg z \in [0, 2\pi)$.

**b)** Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 + 2\mathrm{i}z^2 = 2$$

in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ an.

---

**Aufgabe 4** (10 Punkte): Berechnen Sie für

$$f(x) = x\mathrm{e}^x$$

die Taylor–Entwicklungen von

**a)** $\dfrac{1}{1+f(x)}$ **b)** $f\big(f(x)\big)$ **c)** $f^{-1}(x)$

um $x = 0$ bis zu Termen der Ordnung 2 einschließlich.

---

**Aufgabe 5** (10 Punkte): Transformieren Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

auf Echelon–Form. Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine Lösung, und wie lautet diese?

---

**Aufgabe 6** (10 Punkte): Bestimmen Sie die Matrix $A$, die den Vektor $(1, 1)^{\mathrm{t}}$ invariant lässt und $(-2, 1)^{\mathrm{t}}$ auf $(1, 0)^{\mathrm{t}}$ abbildet.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

---

**Aufgabe 7** (10 Punkte): Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = x^4 - x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$$

sowie deren Typ (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

---