

Nachname:	Matrikelnr.:	Studiengang: <input type="checkbox"/> wiwi <input type="checkbox"/> winf
Vorname:		<input type="checkbox"/> t.o. bwl <input type="checkbox"/> NF bau
		<input type="checkbox"/> _____

vom Korrektor auszufüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe	Korrektor

## Klausur zur Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Modul 41990

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Zugelassene Hilfsmittel:** 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In den **Aufgaben 1-4** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- In den **Aufgaben 5-10** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes abgegebene Blatt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte könnten Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	$x^a$	$e^x$	$\sin x$	$\tan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	$e^x$	$\cos x$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$
$f(x)$	$b^x$	$\ln x $	$\cos x$	$\arctan x$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b) b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$x$	$\sin x$	$\cos x$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 30.09.2021 über das Campus-System der Universität Stuttgart (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekannt gegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:**  
Wer diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreibt und nicht besteht, ist selbst dafür verantwortlich sich zu erkundigen, ob er eine zugehörige mündliche Nachprüfung erhält, und sich gegebenenfalls beim Prüfer anzumelden. Diese Anmeldung hat bis zum 5.11.2021 zu erfolgen.

VIEL ERFOLG!

**Aufgabe 1** (1+1=2 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion  $f: D \rightarrow W: f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$  mit  $D = \mathbb{R}^+$  und  $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ .

Bestimmen Sie die Umkehrabbildung:  $f^{-1}(x) =$

(b) Gegeben seien die Abbildungen  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : g(x) = 1 + x^2$  und  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : h(x) = \ln(x)$ .

Bestimmen Sie die Verkettung:  $h \circ g(x) =$

**Aufgabe 2** (2+1=3 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des von  $v_1, v_2, v_3$  aufgespannten Spats in Abhängigkeit von  $\lambda$ .

Volumen =

(b) Für welche Wahl von  $\lambda$  sind die Vektoren  $v_1, v_2, v_3$  linear abhängig?  $\lambda =$

**Aufgabe 3** (1+2+1=4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \frac{3x + 23}{x^2 - x - 12}$ .

(a) Bestimmen Sie die Nullstellen des Nenners  $x^2 - x - 12$ :

$x_1 =$    $\quad x_2 =$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung für  $f(x)$ :

$\frac{3x + 23}{x^2 - x - 12} =$

(c) Berechnen Sie das Integral

$\int \frac{3x + 23}{x^2 - x - 12} dx =$

**Aufgabe 4** (1+1+2=4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = e^{x^3}$ .

Bestimmen Sie die Ableitungen

$$f'(x) = \boxed{3x^2 e^{x^3}}$$

$$f''(x) = \boxed{6xe^{x^3} + 9x^4 e^{x^3}}$$

und das Taylorpolynom der Stufe 2 zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ :

$$T_2(f, x, 1) = \boxed{e + 3e(x - 1) + \frac{15}{2}e(x - 1)^2}$$

**Aufgabe 5** (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$  des Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus:

1. Generieren von Nullen unterhalb der Hauptdiagonalen:

$$[A || b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & -3 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ Z_2 - Z_1 \\ Z_3 + 3 \cdot Z_1 \end{array} \iff \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

2. Generieren von Einsen auf der Hauptdiagonalen

$$\iff \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \frac{1}{2} \iff \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. Generieren von Nullen oberhalb Hauptdiagonalen

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{Z_1 - 2 \cdot Z_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Damit ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

**Aufgabe 6** (2+1+4=7 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y) = x^4 - x^2 + (1 - 2x + y)^2.$$

- (a) Berechnen Sie den Gradienten  $\nabla f(x, y)$ .
- (b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix  $H_f(x, y)$ .
- (c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von  $f(x, y)$  und klassifizieren Sie diese (Minimum, Maximum, Sattelpunkt).

(a) Durch Ableiten nach  $x$  und  $y$  erhält man den Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x - 4(1 - 2x + y) \\ 2(1 - 2x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + 6x - 4y - 4 \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix}$$

(b) Indem man den Gradienten weiter ableitet, erhält man die Hesse-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Zur Berechnung der kritischen Stellen muss der Gradient nullgesetzt werden und das resultierende Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{pmatrix} 4x^3 + 6x - 4y - 4 \\ -4x + 2y + 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der zweiten Gleichung führt zu

$$y = -1 + 2x. \quad (*)$$

Einsetzen dieser Gleichung in die 1. Gleichung ergibt:

$$4x^3 + 6x - 4y - 4 = 0 \iff 4x^3 + 6x - 4(-1 + 2x) - 4 = 0 \iff (2x^2 - 1)x = 0.$$

Somit gilt  $x_1 = 0$  oder  $2x^2 - 1 = 0$ , also  $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ .

Die jeweiligen  $y$ -Komponenten sind mit Gleichung (??)

$$y_1 = -1, \quad y_2 = -1 + \sqrt{2}, \quad y_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Insgesamt erhalten wir also die drei kritischen Stellen

$$P_1 = (0, -1), \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \sqrt{2}\right), \quad P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \sqrt{2}\right).$$

Zur Klassifizierung der kritischen Stellen müssen diese in die Hesse Matrix eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(P_2) = H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Es muss noch bestimmt werden, ob diese Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind. Berechnen der Determinante liefert:

$$\det H_f(P_1) = 12 - 16 = -4 < 0.$$

$$\det H_f(P_2) = \det H_f(P_3) = 24 - 16 = 8 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(P_2) = f_{xx}(P_3) = 12 > 0$$

Damit folgt mit Satz 6.2.3 aus der Vorlesung

- $P_1$  ist ein Sattelpunkt, da die Determinante negativ ist.
- $P_2$  und  $P_3$  sind lokale Minima da die Determinante positiv und der erste Matrixeintrag positiv ist.

**Aufgabe 7** (2+2=4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2}$$

(b) Berechnen Sie die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

(a) i) Anwendung des Quotientenkriteriums liefert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}n^2}{(n+1)^2 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 2 > 1.$$

Damit folgt die Divergenz der Reihe.

Die Reihe ist also weder konvergent noch absolut konvergent.

(b) Es handelt sich um die geometrische Reihe. Man macht eine Indexverschiebung und ergänzt den ersten Summanden

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Oder alternativ ohne Indexverschiebung:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{3^n} = 3 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 \right) = 3 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$


---

**Aufgabe 8** (2+3=5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a)  $\int x \cos(2x) \, dx$

(b)  $\int (1 - (\cos(x))^2) \sin(x) \, dx$

(a) Partielle Integration mit  $u = x$  und  $v' = \cos(2x)$  liefert:

$$\begin{aligned} \int x \cos(2x) \, dx &= \left[ \frac{x \sin(2x)}{2} \right] - \int \frac{\sin(2x)}{2} \, dx \\ &= \left[ \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} \right]. \end{aligned}$$

(b) Substitution von  $u := \cos(x)$ ,  $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$  und  $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$  liefert

$$\begin{aligned} \int (\sin(x))^3 \, dx &= \int \sin(x) (1 - (\cos(x))^2) \, dx \\ &= \int (u^2 - 1) \, du = \left[ \frac{u^3}{3} - u \right] \\ &= \left[ \frac{(\cos(x))^3}{3} - \cos(x) \right]. \end{aligned}$$

**Aufgabe 9** (2+1+1=4 Punkte)

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{\ln(x) - x + 1}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{-4n^3 + 3}$

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + 5 - \frac{n}{n+5} \right)$

(a) Da Zähler und Nenner beide gegen 0 konvergieren, kann man (zweimal) den Satz von l'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{\ln(x) - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + x^2 - 5x + 3)'}{(\ln(x) - x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + 2x - 5)'}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 2}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{8}{-1} = -8. \end{aligned}$$

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{-4n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{-4n^3 + 3} = -\frac{1}{4}$ .

(c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n + 5 - \frac{n}{n+5} \right) = +\infty$ .

**Aufgabe 10** (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix  $\mathbf{A}$  regulär? Ist sie invertierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

---

Wir berechnen die Determinante von  $\mathbf{A}$ :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -12.$$

Da  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$  ist die Matrix regulär      und invertierbar.

---