

## Klausur zur Höheren Mathematik III

für bau, ernen, fmt, geod, mach, medtech, tema, umw, verf, verk

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: 4 Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es sind vollständige Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen abzugeben. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgt **auf gesondertem Papier. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 18.10.2021 über das Online-Portal Campus (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.
- Information zur Klausureinsicht wird auf der Internet-Seite der Veranstaltung bekannt gegeben. (<http://mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/HM-Knarr/HM-Knarr-WS2021/>)

VIEL ERFOLG!

### **Hinweise für Wiederholer:**

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen einen entsprechenden Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

---

**Aufgabe 1** (9 Punkte)

Sei die Dreiecksfläche  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  definiert durch die Eckpunkte  $(-1, 0), (0, 0), (0, 2) \in \mathbb{R}^2$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Vektorfeld gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + 3y^2 \\ -2e^y + 7 \end{pmatrix}.$$

- (1 Punkt) Bestimmen Sie den Flächeninhalt von  $T$ .
- (2 Punkte) Berechnen Sie  $\operatorname{div} f$  und  $\operatorname{rot} f$ .
- (3 Punkte) Berechnen Sie den Ausfluss  $A(f, \partial T)$ .
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Zirkulation  $Z(f, \partial T)$ .

**Aufgabe 2** (10 Punkte)

Berechnen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' + 2y = 4x^2 + e^{-x}.$$

**Aufgabe 3** (11 Punkte)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay. \tag{1}$$

- (10 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen  $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  von (1) mit  $y_1(0) = v_1$ ,  $y_2(0) = v_2$  und  $y_3(0) = v_3$ .
- (1 Punkt) Begründen Sie, dass die Lösungen  $y_1, y_2$  und  $y_3$  ein Fundamentalsystem von (1) bilden.

**Aufgabe 4** (10 Punkte)

Es ist die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in (-\pi, 0), \\ x & \text{für } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

gegeben.

- (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  auf dem Intervall  $[-2\pi, 2\pi]$ .
- (6 Punkte) Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe von  $f$ .
- (2 Punkte) Bestimmen Sie für alle  $x \in [0, 2\pi]$  den Grenzwert der Fourier-Reihe.