Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/8	/8	/12	/11	/10	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Seien $(f_k : [0,5] \to [-999, 999])_{k \in \mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit punktweiser Grenzfunktion f, also $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ für jedes $x \in [0,5]$. Gilt dann $\lim_{k\to\infty} \int_0^5 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Hier lässt sich der Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden: Die konstante Funktion $h : [0,5] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1000$ erfüllt $|f_k| \le h$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 5000 < \infty$.

Erläuterung: Ohne Vorsichtsmaßnahme lassen sich Integral und Limes oft nicht vertauschen. Ein eindrückliches Gegenbeispiel finden Sie in der parallelen Aufgabe der vorigen Klausur.

$\overline{}$ 2

2B. Gibt es eine stetige und 2π–periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, deren Fourier–Koeffizienten die Ungleichung $|c_k| \ge 1/k^2$ für alle $k = 1, 2, 3, \dots$ erfüllen?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Wir betrachten $c_k = 1/k^2$ für alle $k \ne 0$ und $c_0 = 0$. Damit gilt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, daher definiert $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ eine stetige Funktion mit den gewünschten Fourier–Koeffizienten $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

Erläuterung: Jedes Fourier–Polynom $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ ist stetig. Dank $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig, und die ersehnte Grenzfunktion f ist stetig. *Vorsicht:* Ohne geeignete Voraussetzungen an die Koeffizientenfolge gelingt dies nicht! Ein eindrückliches Gegenbeispiel finden Sie in der parallelen Aufgabe der vorigen Klausur.

Alternative: Als konkretes Beispiel kennen Sie die Integralfunktion der Sägezahnfunktion.

$\overline{}$ 2

2C. Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ besitze eine Basis aus Hauptvektorketten der Länge 2 und 3 zum Eigenwert $\lambda = 0$. Welche Dimension hat demnach der Kern von A?

Begründete Antwort:

Der Kern von A hat die Dimension 2.

Bezüglich der genannten Jordan–Basis wird A dargestellt durch die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums $\ker(A - \lambda E)$. Für $\lambda = 0$ ist dies der Kern von A. Die Matrizen A und J sind konjugiert, genauer gilt $A = T^{-1} J T$, wobei die Basiswechselmatrix $T = (u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)$ aus den Hauptvektorketten besteht. Ohne weitere Mühe lesen wir daran ab: $\dim\ker(A) = \dim\ker(J) = 2$.

$\overline{}$ 2

2D. Wir suchen die Lösungen $(u,v):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems $u''' = u' + 3v$ und $v'' = 2v' - u$. Finden sich darunter sechs linear unabhängige Lösungen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension $3+2=5$.

Erläuterung: Wir schreiben unser DGSystem äquivalent als DGSystem erster Ordnung:

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ v \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Darauf können wir nun wunderbar den Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme anwenden: Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 5. Darin ist jede Familie von 6 Elementen (hier: Lösungsfunktionen) demnach linear abhängig. Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir so, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

2

2E. Sie werfen unabhängig zwei faire Würfel. Sei A das Ereignis „Der erste Würfel zeigt Augenzahl 1“ und B das Ereignis „Der zweite Würfel zeigt Augenzahl 2“ sowie C das Ereignis „Beide Würfel zeigen dieselbe Augenzahl“. Ist die Familie (A,B,C) stochastisch unabhängig?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die definierende Produktformel ist hier nicht erfüllt:
Es gilt $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 1/6$, aber $\mathbf{P}(A\cap B\cap C) = 0 \ < \ \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$.

Erläuterung: Die drei Ereignisse A,B,C sind paarweise stochastisch unabhängig, denn es gilt $\mathbf{P}(A\cap B) = 1/36 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A\cap C) = 1/36 = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C)$, $\mathbf{P}(B\cap C) = 1/36 = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$. Dennoch ist die Familie (A,B,C) stochastisch abhängig, wie oben gesehen. Es genügt also nicht, nur die paarweise Unabhängigkeit zu prüfen! Sie kennen dieses Phänomen aus der Linearen Algebra: Bei der linearen Unabhängigkeit von Vektoren verhält es sich genauso.

2

2F. Sie suchen $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $y\,\partial_x u(x,y) - x\,\partial_y u(x,y) = 0$ und $u(x,0) = \cos(x)$. Aus $X' = Y$, $Y' = -X$ erhalten Sie Kreise um $(0,0)$ als Charakteristiken. Existiert demnach eine Lösung u?

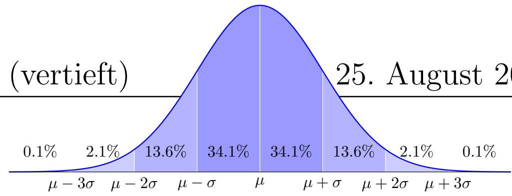
☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Auf jedem Kreis vom Radius $r\in\mathbb{R}_{\ge 0}$ ist der Wert $\cos(r)$ vorgegeben, also $u(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$. Probe: Diese Funktion erfüllt die geforderte PDE.

Erläuterung: Ausführlich lösen wir $X' = Y$, $Y' = -X$ und $U' = 0$. Entlang jeder Charakteristik $X(s) = x_0\cos(s)$, $Y(s) = -x_0\sin(s)$ ist demnach der Funktionswert $U(s)$ konstant. Zusammen mit $U(0) = \cos(x_0)$ folgt $u(x,y) = \cos(\sqrt{(x^2+y^2)})$. Probe!

Ohne Vorbereitung ist diese Frage etwas trickreich, da man die geometrische Anordnung verstehen muss. Zum Glück kennen Sie dieses schöne Beispiel aus Ihrer Vorlesung!

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

3A. Sie wiederholen 60 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 60%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 36 180 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 60000 \cdot 0.6 = 36000$ Erwartungswert zu $B(n,t)$, $n = 60000$, $t = 0.6$

$\sigma^2 = 36000 \cdot 0.4 = 14400, \quad \sigma = 120$ Varianz und Streuung zu $B(n,t)$

$p \approx \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \beta = 180.5/120 = 1.504$ Lokaler Grenzwertsatz, Stetigkeitskorrektur

$\approx 0.50 + 0.43 = 0.93 = 93\%$ Ablesen aus der Tabelle, glückliche Interpolatio

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, nämlich $B(n,t)$ mit $n = 60\,000$ und $t = 0.6$. Die exakte Wkt ist somit $p = \sum_{k=0}^{36180} B(n,t)(k) = 0.93377\ldots$, doch das ist leider mühsam. Als gute Näherung nutzen wir die Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\beta = 180/\sigma \approx 1.5$; das ist etwas ungenauer, der Unterschied verschwindet glücklicherweise in der Rundung. Alles wird gut.

—/3

3B. Ein Satellit hat 2 Gigabit Arbeitsspeicher. Während eines Betriebsintervalls beträgt die Fehlerwkt 10^{-9} pro Bit, unabhängig voneinander. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie höchstens 2 Bitfehler? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} = 2$ Erwartungswert für die Anzahl der Bitfehler

$q \approx \left[\frac{\mu^0}{0!} + \frac{\mu^1}{1!} + \frac{\mu^2}{2!}\right] \mathrm{e}^{-\mu}$ Näherung durch die Poisson–Verteilung $P(\mu)$

$\approx 5 \cdot 0.135 = 0.675 \approx 68\%$ Daten einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, $B(n,t)$ mit $n = 2 \cdot 10^9$ und $t = 10^{-9}$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.67667\ldots$, die Poisson–Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen. Wenn Sie es dennoch tun, finden Sie $\int_{-2.5/\sigma}^{0.5/\sigma} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.59989 \approx 60\%$ oder $\int_{-\infty}^{0.5/\sigma} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.63829 \approx 64\%$. Diese Näherungen sind allzu grob und hier nicht gut genug; das war zu erwarten.

—/3

3C. Beim weltgrößten Skatturnier in Berlin nehmen 4% Profis und 96% Amateure teil. Die Wahrscheinlichkeit in die Finalrunde einzuziehen, ist für Profis 96%, für Amateure nur 16%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit r ist ein zufällig ausgewählter Finalist ein Profi?

$$r = \mathbf{P}(P|F) = \frac{\mathbf{P}(P \cap F)}{\mathbf{P}(F)}$$ Definition der bedingten Wkt, P = Profi, F = Finalrunde

$$= \frac{\mathbf{P}(F|P)\mathbf{P}(P)}{\mathbf{P}(F|P)\mathbf{P}(P) + \mathbf{P}(F|A)\mathbf{P}(A)}$$ Bayes, entweder P = Profi oder A = Amateur

$$= \frac{0.96 \cdot 0.04}{0.96 \cdot 0.04 + 0.16 \cdot 0.96}$$ Daten einsetzen…

$$= \frac{1}{5} = 0.20 = 20\%$$ … und ausrechnen

Erläuterung: Bei dieser Aufgabe hilft, wie so oft, eine gute Notation, um über die gesuchten und die gegebenen Daten effizient buchzuführen. Das ist eigentlich die einzige Schwierigkeit, der Rest ist Bruchrechnung. Sie können Ihren Ansatz auch in Baumform organisieren, wenn Ihnen das leichter / vertrauter scheint; das ist etwas länger, führt aber zum selben Ergebnis.

Fun fact: Eine ähnliche Rechnung kennen Sie aus der Vorlesung für die Zuverlässigkeit eines Tests. Damals klang das Ergebnis paradox, jetzt plausibel. Mathematik schafft Klarheit!

$\overline{}$ 3

3D. Eine Datenbank hat 2 000 000 Datensätze. Parallele Prozesse schreiben gleichzeitig in 1 100 dieser Datensätze (gleichverteilt, unabhängig). Mit welcher Wkt s kommt es zu keiner Kollision?

$$s = \Big(1 - \frac{0}{2 \cdot 10^6}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2 \cdot 10^6}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1099}{2 \cdot 10^6}\Big)$$ exakte Wkt, setze $n = 2 \cdot 10^6$, $k = 1100$

$$= \prod_{j=0}^{k-1}\Big(1 - \frac{j}{n}\Big) \lessapprox \prod_{j=0}^{k-1} \exp\Big(-\frac{j}{n}\Big)$$ gute Näherung durch Exponentialfunktion

$$= \exp\Big(-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{j}{n}\Big) = \exp\Big(-\frac{k(k-1)}{2n}\Big)$$ Exponentialgesetz, Summenformel

$$\approx \mathrm{e}^{-0.302} \approx 0.741 \approx 74\%$$ Einsetzen und Ausrechnen

Erläuterung: Sie kennen diese Rechnung aus der Vorlesung zum Geburtstagsparadox, oder allgemein zu Kollisionswkten. Der exakte Wert des obigen Produkts ist $s = \dots$, unsere Näherung durch die Exponentialfunktion ist also erfreulich gut. Die Rechnung lässt genügend Spielraum für kleine Rundungen und führt dennoch auf das richtige Endergebnis.

Fun fact: Ergebnisse dieser Art gelten als paradox, da die Kollisionswkt unerwartet hoch ist. Schon bei $k = 2000$ Schreibzugriffen beträgt sie etwa 63%, bei $k = 4000$ sogar über 98%. Das liegt an dem Quadrat k^2 im Zähler!

$\overline{}$ 3

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist die homogene, lineare Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0. \qquad \text{(L)}$$

4A. Geben Sie das charakteristische Polynom p der Gleichung (L) an.

$p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

1

4B. Es gilt $p(2) = 0$. Zerlegen Sie das Polynom p in Linearfaktoren:

$p(x) = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})(x - 2)^2$

2

4C. Nennen Sie eine Basis des Raumes aller reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto y(t)$ von (L).

Basis: $\cos(t)$, $\sin(t)$, e^{2t}, $t\,\mathrm{e}^{2t}$

2

4D. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $u(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^t$.

$u(t) = \mathrm{e}^t/2$ keine Resonanz, $p(1) = 2$

1

4E. Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $v(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

$v(t) = \mathrm{e}^{-t}/18$ keine Resonanz, $p(-1) = 18$

1

4F. Schließen Sie auf eine partikuläre Lösung $w(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung $y^{(4)}(t) - 4y'''(t) + 5y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \cosh(t)$.

$w(t) = \dfrac{1}{2}u(t) + \dfrac{1}{2}v(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{4} + \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{36}$ Dank Linearität!

1

Aufgabe 5. *Partielle Differentialgleichungen* (8 Punkte)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die partielle Differentialgleichung

$$\text{(P)} \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) + y\,\partial_y u(x,y) = 2\,\dfrac{y}{x}\sqrt{u} & \text{für alle } x \geq 1 \text{ und } y \geq 0, \\ u(1,y) = y^2 & \text{für } x = 1 \text{ und alle } y \geq 0. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (1, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

5A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = X(s)$, $\quad X(0) = 1,$

$Y'(s) = \boxed{Y(s)}$, $\quad Y(0) = y_0,$

$U'(s) = \boxed{2\,\dfrac{Y(s)}{X(s)}\sqrt{U(s)}}$, $\quad U(0) = y_0^2.$

2

5B. Lösen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem:

$X(s) = \mathrm{e}^s$,

$Y(s) = \boxed{y_0\,\mathrm{e}^s}$,

$U(s) = \boxed{y_0^2(1+s)^2}$.

3

5C. Bestimmen Sie zu $(x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x,y)$ gilt:

$s = \boxed{\ln(x)}$, $\quad y_0 = \boxed{y/x}$.

2

5D. Geben Sie die Lösung u von (P) an. *Tipp zur Probe:* Im Punkt $(\mathrm{e}, 3)$ gilt $u(\mathrm{e}, 3) = 36/\mathrm{e}^2$.

$u(x,y) = U(s) = (y^2/x^2) \cdot (1 + \ln(x))^2$ Machen Sie die Probe!

Erfolgreiche Probe zeigt die Existenz einer Lösung. Unsere Herleitung zeigt die Eindeutigkeit.

1

Aufgabe 6. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (12 Punkte)

Zu lösen ist das homogene, lineare Differentialgleichungssystem

$$\text{(H)}\left\{\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 4y_2 + 2y_3 - 7y_4 \\ y_2' &= -y_1 + 5y_2 + 3y_3 - 5y_4 \\ y_3' &= -7y_3 + 10y_4 \\ y_4' &= -5y_3 + 8y_4 \end{aligned}\right.$$

6A. Bestimmen Sie die Matrix A, die das obige System in der Form $y' = A\,y$ darstellt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 5 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - 3E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + 2E_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & -7 \\ -1 & 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

1

6B. Zur Matrix A und Eigenwert 3 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Hauptvektor der Stufe $\boxed{3}$.

Folgern Sie zur Matrix A die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2:

$\lambda_1 = \boxed{3} > 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{3}$

und

$\lambda_2 = \boxed{-2} < 0$ mit algebraischer Vielfachheit $\boxed{1}$

Bestimmen Sie zu A eine Jordan–Basis v_1, v_2, v_3, v_4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6

6C. Bestimmen Sie zu (H) die zugehörige Fundamentalmatrix $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{4\times4} : t \mapsto W(t)$.
Die $k$te Spalte ist die Lösung $w_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 : t \mapsto w_k(t)$ von (H) mit Startvektor $w_k(0) = v_k$.

$$W(t) = \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3t} & (1+2t)\,\mathrm{e}^{3t} & (1+t+t^2)\,\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{3t} & (1+t)\,\mathrm{e}^{3t} & (2+t+\frac{t^2}{2})\,\mathrm{e}^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} & 2\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

3

6D. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt.
Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- [ ] $|y(t)|$ konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$.
- [ ] $|y(t)|$ konvergiert nicht, bleibt aber beschränkt.
- [ ] $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst polynomiell.
- [X] $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell.

Begründung: Jede Lösung y ist eine Linearkombination $y = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$. Mit Wkt 1 gilt $\alpha_3 \neq 0$. Die Lösung $y(t)$ wächst dann exponentiell.

Erläuterung: Theoretisch möglich ist auch Konvergenz gegen 0 (für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Diese Fälle haben jedoch Wkt 0. Gefragt war das typische Verhalten: exponentielles Wachstum.

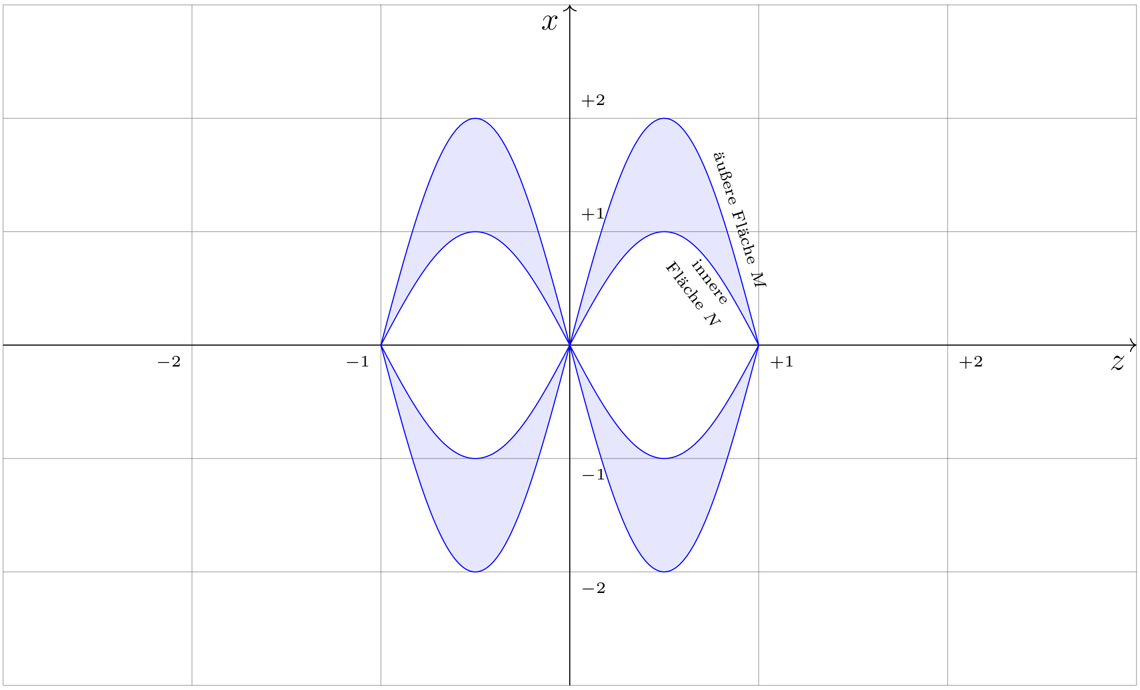
2

Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen* (11 Punkte)

Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den folgenden Körper K und das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} z^2 \le 1 \\ \sin^2(\pi z) \le x^2 + y^2 \le 4\sin^2(\pi z) \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

7A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der z–x–Ebene $E = \{\, (x,y,z)^\intercal \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$:



2

7B. Parametrisieren Sie K durch Zylinderkoordinaten $\Phi : D \xrightarrow{\sim} K : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$

und $D = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} -1 \le z \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{|\sin(\pi z)|} \le r \le \boxed{2|\sin(\pi z)|} \end{array} \right\}.$ 1

7C. Berechnen Sie das Volumen des Körpers K:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(K) &= \int_{z=-1}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=|\sin \pi z|}^{2|\sin(\pi z)|} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z && \text{Transformationsformel, Fubini} \\ &= \int_{z=-1}^{1} \pi \cdot 3\sin(\pi z)^2 \,\mathrm{d}z && \text{HDI, einsetzen, zusammenfassen} \\ &= 3\pi && \text{ausrechnen} \end{aligned}$$

3

7D. Die Randfläche von K besteht aus der äußeren Fläche M und der inneren Fläche N.

Die äußere Fläche M wird parameterisiert durch $\Psi\begin{pmatrix}\varphi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Normalenvektor auf M (aus dem Körper K heraus):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Psi}{\partial z} = \begin{pmatrix}\boxed{-2\sin(\pi z)\sin(\varphi)}\\ \boxed{2\sin(\pi z)\cos(\varphi)}\\ 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\boxed{2\pi\cos(\pi z)\cos(\varphi)}\\ \boxed{2\pi\cos(\pi z)\sin(\varphi)}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\sin(\pi z)\cos(\varphi)\\ 2\sin(\pi z)\sin(\varphi)\\ \boxed{-4\pi\sin(\pi z)\cos(\pi z)}\end{pmatrix}$$

2

7E. Bestimmen Sie das Flussintegral des Vektorfeldes f durch die äußere Fläche M aus dem Körper K heraus:

$$\int_M f \bullet \mathrm{d}M = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-1}^{1} f(\Psi(\varphi,z)) \bullet (\partial_\varphi\Phi \times \partial_z\Phi)(\varphi,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{Fächenintegral, Fubini}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-1}^{1} 4\sin(\pi z)^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi \quad \text{Einsetzen, ausrechnen}$$

Erläuterung: Das Skalarprodukt benötigt aus der vorigen Frage nur die bereits vorgegebenen Daten, das reduziert die möglichen Fehlerquellen. Das innere Integral hat den Wert 4, denn $\int_{z=-1}^{1}\sin(\pi z)^2\,\mathrm{d}z = 1$ dank Rechnung oder Formelsammlung oder Anschauung!

Tipp zur Probe: Unser freundlicher Tipp dient Ihnen zur Überprüfung. Der Satz von Gauß besagt $\int_K \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}K = \int_M f \bullet \mathrm{d}M + \int_N f \bullet \mathrm{d}N$. Dank $\mathrm{div}(f) = 2$ und $\mathrm{vol}(K) = 3\pi$ ist die linke Seite gleich 6π. Auf der rechten Seite steht 8π, wie berechnet, plus -2π, wie als Tipp angegeben. Das können Sie als schnelle und einfache Probe nutzen. Alles wird gut.

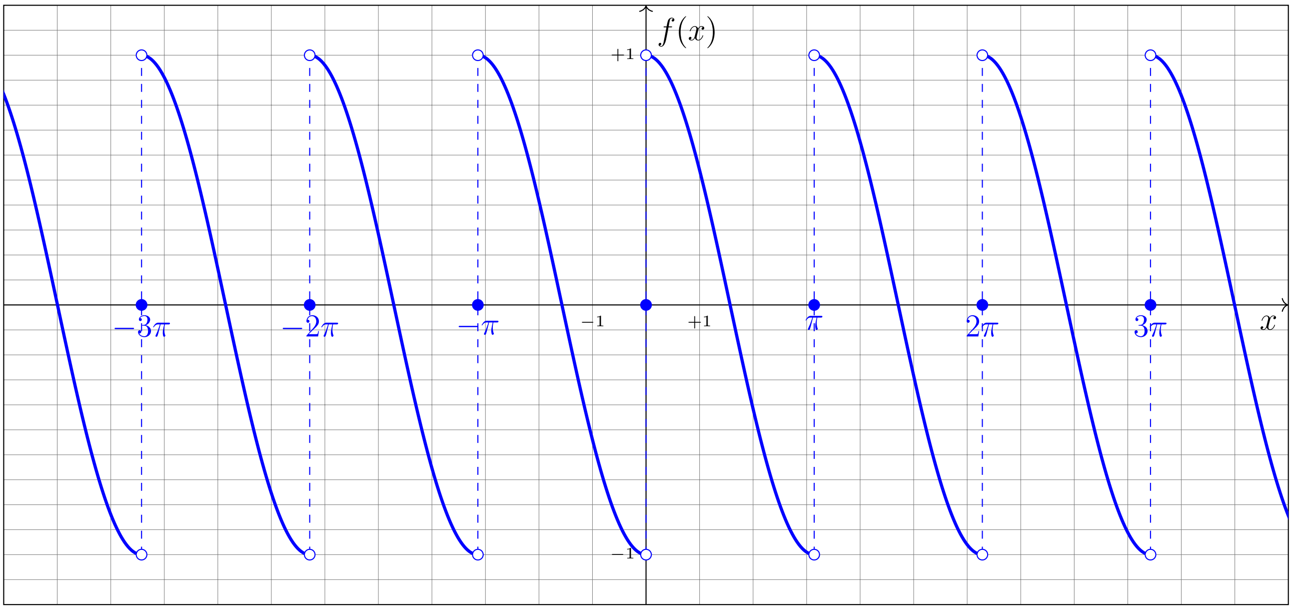
3

Tipp zur Probe: Es gilt $\int_N f \bullet \mathrm{d}N = -2\pi$ und der Gaußsche Integralsatz.

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $f(x) = \cos(x)$ für $0 < x < \pi$.

8A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



1

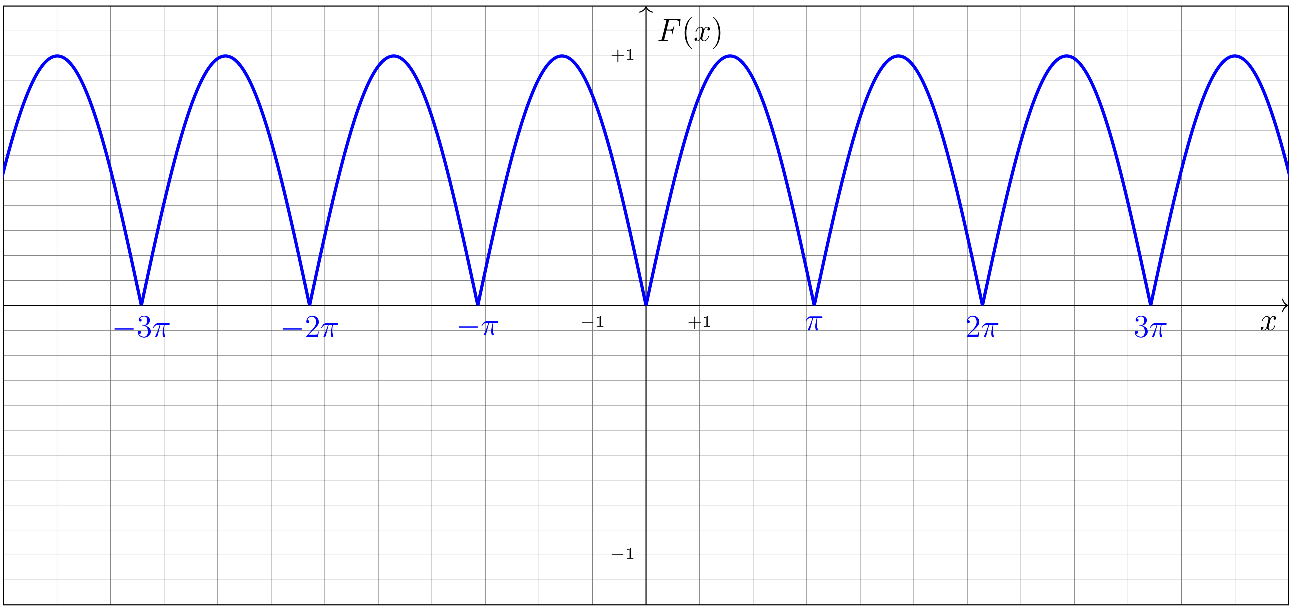
8B. Bestimmen Sie zur Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1/2$$

Dank Parseval / Energiegleichung!

1

8C. Skizzieren Sie ebenso die Integralfunktion $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.



1

Hinweis: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$.

8D. Berechnen Sie die Koeffizienten b_k der Fourier–Sinus–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$:

$b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{x=0}^{\pi} \sin(kx)\cos(x)\,\mathrm{d}x$ Definition, vereinfachen für die ungerade Funktio

$= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{x=0}^{\pi} \sin((k-1)x) + \sin((k+1)x)\,\mathrm{d}x$ Vereinfachen nach Hinweis, Null für $k = \pm 1$

$= \dfrac{-1}{\pi}\Big[\dfrac{\cos((k-1)x)}{k-1} + \dfrac{\cos((k+1)x)}{k+1}\Big]_{x=0}^{\pi}$ Stammfunktion ausschreiben für $k \neq \pm 1$

$= \dfrac{-1}{\pi}\Big[\dfrac{(-1)^{k-1}-1)}{k-1} + \dfrac{(-1)^{k+1}-1)}{k+1}\Big]$ Grenzen einsetzen, Null für k ungerade

$= \dfrac{4}{\pi}\dfrac{k}{k^2-1} \quad = \quad \dfrac{8}{\pi}\dfrac{n}{4n^2-1}$ für k gerade, also $k = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Erläuterung: Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine. Das Ergebnis wurde soweit möglich vereinfacht.

4

8E. Bestimmen Sie den exakten Wert der Summe $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{8n}{4n^2-1}\Big)^2 \in [9.8, 9.9]$:

$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2$ Energiegleichung für $f(x) \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}S/\pi^2$ Einsetzen des Integrals und der Koeffizienten b_k

$S = \pi^2 = 9.86960\ldots$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Die Energiegleichung gilt dank des Satzes von Parseval.
Der freundliche Hinweis $S \in [9.8, 9.9]$ dient zur Probe dank $\pi \approx 3.14$.

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.