



Universität Stuttgart

Prof. Dr. Guido Schneider  
Fachbereich Mathematik  
Universität Stuttgart

## Klausur

für Studierende der Fachrichtungen  
el, tpeI

### Bitte unbedingt beachten:

- Bitte beschriften Sie jeden Ihrer Zettel mit Namen und Matrikelnummer.
- Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen separate eigene Blätter.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis gut sichtbar vor sich auf den Tisch.
- Verwenden Sie **keinen Bleistift oder Rotstift**.
- **Taschenrechner, Mobiltelefone etc. sind nicht zugelassen.**
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- **Zugelassene Hilfsmittel: Keine**, insbesondere keine handbeschriebenen Zettel, Bücher, Fotokopien und elektronische Rechengерäte.
- In dieser Klausur können bis zu **40 Punkte** erreicht werden.
- Nach der Klausur legen Sie bitte Ihre beschriebenen Blätter in den gefalteten Umschlagbogen hinein.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Iliasseite der Vorlesung bekanntgegeben. Mit 14 und mehr Punkten ist die Klausur auf jeden Fall bestanden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!

**Aufgabe 1** (1+3+4+2)

a) Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx.$$

b) Berechnen Sie

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2)^4 d(x, y)$$

mit  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$  mittels Polarkoordinaten.

c) Bestimmen Sie den Schwerpunkt von

$$P = \{(x, y, z) : 0 \leq (x^2 + y^2)^2 \leq 4z \leq 1\}.$$

d) Geben Sie eine Normalbereichsdarstellung der Menge

$$S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

an.

**Lösung**

a) Es ist

$$\int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^3) dy dx = \int_0^1 \left[ x^3 y + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^x dx = \int_0^1 x^4 + \frac{1}{4} x^4 dx = \left[ \frac{1}{4} x^5 \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Wir verwenden Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

mit  $r \in [0, 2]$  und  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$  und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 + y^2)^4 d(x, y) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^9 dr d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^2 r^9 dr d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{10} r^{10} \right]_0^2 + \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{10} r^{10} \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{10} 2^{10} = \frac{512\pi}{5}. \end{aligned}$$

c) Wir führen Zylinderkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

mit  $r > 0$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  ein. Damit ist  $x^2 + y^2 = r^2$  und  $r^4 \leq 4z \leq 1$  bzw.  $r^4/4 \leq z \leq 1/4$ . Für den Schwerpunkt gilt die Formel

$$S(P) = \frac{\int_P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z)}{\int_P 1 d(x, y, z)}.$$

Wir berechnen daher zunächst das Volumen von  $P$ . Es gilt

$$\begin{aligned} V(P) &= \int_P 1 dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r dz d\varphi dr = 2\pi \int_0^1 [rz]_{z=r^4/4}^{1/4} dr = \frac{1}{2}\pi \int_0^1 (r - r^5) dr \\ &= \frac{1}{2}\pi \left[ \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{6}r^6 \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen die Integrale über die Komponenten berechnet werden. Da  $P$  rotationssymmetrisch zur  $z$ -Achse ist, muss der Schwerpunkt auf der  $z$ -Achse liegen und somit die  $x$ - und  $y$ -Komponente gleich 0 sein. Dies kann auch schnell nachgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \int_P x d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r^2 \cos(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi) (1 - r^4) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^4) \sin(\varphi)]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_P y d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r^2 \sin(\varphi) dz d\varphi dr = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\varphi) (1 - r^4) d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [r^2(1 - r^4)(-\cos(\varphi))]_{\varphi=0}^{2\pi} dr = 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_P z d(x, y, z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^4/4}^{1/4} r z dz d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} r z^2 \right]_{z=r^4/4}^{1/4} d\varphi dr \\ &= \frac{1}{8}\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(r - r^9) dr = \frac{1}{8}\pi \left[ \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{20}r^{10} \right]_{r=0}^1 = \frac{1}{8}\pi \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{20} \right) = \frac{\pi}{40}. \end{aligned}$$

Damit ist der Schwerpunkt von  $P$  gegeben durch

$$S(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}.$$

- d) Wir sehen in  $S$ , dass die  $y$ -Komponente durch  $x$  und die  $z$ -Komponente durch  $x$  und  $y$  ausgedrückt werden können. Die Normalbereichsdarstellung von  $S$  ergibt sich durch

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1\} \\ &= \{(x, y, z) : -1 \leq y \leq 1; -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}; -\sqrt{4 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; -\sqrt{4 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - y^2}\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** (3+3+4)

- a) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3$$

und deren Stabilität und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, 1) \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, 4).$$

- b) Bestimmen Sie die Fixpunkte der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 5x^3 - 4x^5 - y,$$

und untersuchen Sie diese auf lineare und nichtlineare Stabilität.

- c) Gegeben ist die von den Parametern
- $a, b \in \mathbb{R}$
- abhängige Differentialgleichung

$$\cos(x + y^2) + ay + (by \cos(x + y^2) + 3x)y' = 0.$$

Für welche Werte von  $a$  und  $b$  ist die Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie das dazugehörige Potential.**Lösung**

- a) Damit ein Fixpunkt vorliegt, muss
- $\frac{dx}{dt} = x - x^3 \stackrel{!}{=} 0$
- gelten. Dies liefert
- $x_1 = 0$
- ,
- $x_2 = 1$
- und
- $x_3 = -1$
- .

Wegen  $\frac{d}{dx}x - x^3|_{x=\pm 1} = 1 - 3x^2|_{x=\pm 1} < 0$  sind  $x_2 = 1$  und  $x_3 = -1$  stabile Fixpunkte und wegen  $\frac{d}{dx}x - x^3|_{x=0} = 1 - 3x^2|_{x=0} > 0$  ist  $x_1 = 0$  ein instabiler Fixpunkt.

Daher gelten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, 1) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t, 4) = 1.$$

- b) Die Fixpunktbedingung lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} y \\ -x + 5x^3 - 4x^5 - y \end{pmatrix}.$$

Damit muss  $y = 0$  und  $-x + 5x^3 - 4x^5 = 0$  gelten und somit  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_{2/3} = (\pm 1, 0)$  und  $P_{4/5} = (\pm \frac{1}{2}, 0)$ . Die Linearisierung ist

$$A(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 15(x^*)^2 - 20(x^*)^4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Linearisierung um  $P_1$ :** Die Eigenwerte von

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch  $\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ . Da  $\text{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$  gilt, ist  $P_1$  linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

**Linearisierung um  $P_{2/3}$ :** Die Eigenwerte von

$$A(P_{2/3}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch  $\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{2}$ . Da  $\operatorname{Re}(\lambda_{1/2}) < 0$  gilt, sind  $P_{2,3}$  linear sowie nichtlinear asymptotisch stabil.

**Linearisierung um  $P_{4/5}$ :** Die Eigenwerte von

$$A(P_{4/5}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch  $\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$ . Da ein positiver Eigenwert existiert, sind  $P_{4,5}$  linear sowie nichtlinear instabil.

- c) Damit die Differentialgleichung exakt ist, muss für  $g(x, y) = \cos(x + y^2) + ay$  und  $h(x, y) = by \cos(x + y^2) + 3x$  folgende Bedingung gelten

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (1)$$

Wir berechnen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -2y \sin(x + y^2) + a \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -by \sin(x + y^2) + 3.$$

Für  $a = 3$  und  $b = 2$  ist die Bedingung immer erfüllt.

Für das Potential  $\Phi$  mit  $a = 3$  und  $b = 2$  muss  $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dx} = g$  und  $\frac{d\Phi(x,y(x))}{dy} = h$  gelten. Aus der ersten Bedingung können wir auf

$$\Phi(x, y) = \int \cos(x + y^2) + 3y dx = \sin(x + y^2) + 3xy + C(y)$$

schließen, wobei  $C(y)$  eine Funktion ist, die nur von  $y$  abhängt. Mit der zweiten Bedingung kommen wir auf

$$\partial_y \Phi(x, y) = 2y \cos(x + y^2) + 3x + C'(y) \stackrel{!}{=} 2y \cos(x + y^2) + 3x.$$

Dies ist für  $C'(y) = 0$  erfüllt und somit ist das Potential gegeben durch

$$\Phi(x, y) = \sin(x + y^2) + 3xy + \tilde{C}.$$

**Aufgabe 3** (4+4+2)

a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma$$

für das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)^T$$

und das Gebiet

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes.

b) Es sei  $G := \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$ . Das Vektorfeld  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei definiert durch

$$v(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\oint_{\gamma} \langle v(X), dX \rangle$ , wobei  $\gamma$  den Rand von  $G$  einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mit Hilfe eines geeigneten Integralsatzes.

c) Sei  $M$  die Fläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

und  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$F(x, y, z) = r(x, y, z)(x^2, xy^4, \sin(z) \cosh(xy))^T$$

mit  $r(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ . Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_M \langle \operatorname{rot} F(X), n(X) \rangle d\sigma(X),$$

wobei  $n$  das Einheitsnormalenfeld der Menge  $M$  bezeichnet, welches in die positive  $z$ -Richtung zeigt, mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes.

**Lösung**

a) Es ist

$$\operatorname{div} f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Da  $\Omega$  ein Normalbereich bzgl. jeder Koordinate ist und  $f$  ein  $C^1$ -Vektorfeld ist, ergibt sich

mit dem Gausschen Integralsatz

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} \langle f, n \rangle d\sigma &= \int_{\Omega} \operatorname{div} f(x, y, z) d(x, y, z) \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3r^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + 3r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + 3r^2 \cos^2(\theta)) r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (3 \sin^2(\theta) + 3 \cos^2(\theta)) r^4 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3r^4 \sin(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\pi} 3r^4 \sin(\theta) d\theta dr = 2\pi \int_0^1 3r^4 [-\cos(\theta)]_0^{\pi} dr \\
 &= 4\pi \int_0^1 3r^4 dr = 12\pi \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{12}{5} \pi.
 \end{aligned}$$

b) Es werden beide Lösungswege in der Aufgabe verlangt!

– *Direkte Berechnung des Integrals:* Der Rand von  $G$  kann folgendermaßen parametrisiert werden. Es sei  $\partial G = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  mit

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 2,$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 2 \leq t \leq 4,$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Wir berechnen daher

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_1} \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_1^2 \langle v(\gamma_1(t)), \dot{\gamma}_1(t) \rangle dt = \int_1^2 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_1^2 t dt = \frac{3}{2},
 \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_2^4 \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0$$

und

$$\int_{\gamma_3} \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \int_2^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_2^1 1 dt = -1.$$

Somit ergibt sich

$$\oint_{\gamma} \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}.$$

– Berechnung des Integrals mit Hilfe des Integralsatzes von Green: Es ist

$$\operatorname{rot}v(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2}.$$

Wir wenden den Integralsatz an und erhalten

$$\begin{aligned} \oint_G \left\langle v(x, y), \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle &= \int_G \operatorname{rot}v(x, y) d(x, y) \\ &= \int_G \frac{x^2}{y^2} d(x, y) = \int_1^2 \int_x^{x^2} \frac{x^2}{y^2} dy dx = \int_1^2 \left[ -\frac{x^2}{y} \right]_x^{x^2} dx \\ &= \int_1^2 (-1 + x) dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

c) Aus dem Satz von Stokes folgt

$$I = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle.$$

Da  $r(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  ist, verschwindet  $r$  überall in  $M$ , da hier  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  gilt, und somit auch auf  $\partial M$ . Somit gilt  $F(X) = 0$  in  $M$  und auf  $\partial M$ .

Somit folgt

$$I = \int_M \langle \operatorname{rot}F(X), n(X) \rangle d\sigma(X) = \oint_{\partial M} \langle F(X), dX \rangle = 0.$$

#### Aufgabe 4 (2+2+3+3)

a) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2 + e^{-x} \cos(y)) + i(2xy + e^{-x} \sin(\alpha y))$$

komplex differenzierbar?

b) Berechnen Sie

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz \quad \text{und} \quad \oint_{|z|=6} (z-5)^{-1} dz.$$

c) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz.$$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n n^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n n^2.$$

#### Lösung

- a) Es seien  $u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-x} \cos(y)$  und  $v(x, y) = 2xy + e^{-x} \sin(\alpha y)$ . Wir überprüfen die Gültigkeit der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in Abhängigkeit von  $\alpha$ . Die Bedingung lautet

$$\begin{aligned}\partial_x u(x, y) &= 2x - e^{-x} \cos(y) \stackrel{!}{=} 2x + \alpha e^{-x} \cos(\alpha y) = \partial_y v(x, y), \\ \partial_y u(x, y) &= -2y - e^{-x} \sin(y) \stackrel{!}{=} -2y + e^{-x} \sin(\alpha y) = -\partial_x v(x, y).\end{aligned}$$

Damit ist  $f$  für  $\alpha = -1$  komplex differenzierbar.

- b) Da die Singularität  $z_0 = 0$  des Integranden wegen  $|z_0 - 2| = 2 > 1$  außerhalb des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereiches liegt, folgt aus dem Cauchyschen Integralsatz, dass

$$\oint_{|z-2|=1} z^{-4} dz = 0.$$

Für das zweite Integral nutzen wir die Cauchysche Integralformel mit  $f(z) = 1$ . Da  $f$  holomorph ist und  $|5| < 6$ , erhalten wir

$$\oint_{|z|=6} (z-5)^{-1} dz = 2\pi i \cdot f(5) = 2\pi i.$$

- c) Wegen  $|-4| > 2$  ist  $z^* = -1$  die einzige relevante Singularität des Integranden  $f$ . Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f(z); -1).$$

Da es sich bei  $z^*$  um eine doppelte Polstelle handelt, ergibt sich

$$\text{Res}(f(z); -1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z+4} \right) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{4}{(z+4)^2} = \frac{4}{9}$$

und folglich

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = \frac{8}{9} \pi i.$$

*Alternativ:* Wir wenden die Cauchysche Integralformel für Ableitungen mit  $f(z) = \frac{z}{z+4}$  an. Da  $f$  im Inneren des vom Integrationsweg eingeschlossenen Bereich holomorph ist, erhalten wir

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(z+1)^2(z+4)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(-1) = 2\pi i \cdot \frac{4}{(z+4)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{8}{9} \pi i.$$

- d) Der erste Summand hat den Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^2/2^n|}} = \frac{2}{(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^2} = 2.$$

Der zweite Summand hat den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n^2|}} = \frac{1}{(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

Wir untersuchen die Konvergenz an den Randwerten. Da die Folgeglieder bei dem ersten Summanden für  $|z| = 2$  keine Nullfolge bilden, folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = \infty,$$

bei dem zweiten Summanden für  $|z| = 1$  gilt analog

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \infty.$$

Also ist der Konvergenzbereich gerade die Menge  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .