Klausur zur Höheren Mathematik 3

für **Elektroingenieure**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben (oder alternativ eine DINA4-Seite doppelseitig) sowie Zeichenmaterial.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es gibt insgesamt **7** Aufgaben.
  - In **den Aufgaben 1, 4, 5, 6** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
  - Bei **den anderen Aufgaben 2, 3, 7** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen mit Parametern $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$ können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.
  Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$	$(\sin(x))^2$	$(\cos(x))^2$

$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{a^2-x^2}$

- Die Prüfungsergebnisse werden über das C@MPUS–Portal bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 1 (*5+2+3=10 Punkte*)

(i) Sei $D := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le u \le \sqrt{3}\,,\, \ln(u) \le v \le \ln(3u)\right\}$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho\colon D \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^v \\ u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u^2 + \mathrm{e}^v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt $O(F)$.

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 - y \\ -xy \\ -zx + y^2 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

(iii) Sei G die Fläche

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1 \text{ und } z = 2\right\}\,,$$

deren Rand durch

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist mit Normalenvektor

$$\mathrm{n}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie für f aus (ii) das Integral

$$\int\limits_G \Big\langle \operatorname{rot} f(x,y,z), \mathrm{n}(x,y,z) \Big\rangle \,\mathrm{d}(x,y,z)$$

über ein entsprechendes Wegintegral.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{n}(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung von G zeigt.

Aufgabe 2 *(2+2+2=6 Punkte)*
Betrachten Sie den auf der xy-Ebene liegenden Halbkegel

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 4 \;,\; z \geq 0 \right\}$$

mit Dichte $\rho(x, y, z) = 3$.

(i) Schreiben Sie K als Normalbereich bezüglich der x-Achse:

$$K = \boxed{}$$

(ii) Geben Sie K in Zylinderkoordinaten bezüglich x an:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in [0, 4] \;,\; r \in \boxed{} \;,\; \varphi \in \boxed{} \right\}$$

(iii) Geben Sie die Masse m und die x-Koordinate des Schwerpunktes $X_S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von K an:

$$m = \boxed{} \qquad\qquad x = \boxed{}$$

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**	

Aufgabe 3 (*1+1= 2 Punkte*)
Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(t) := \left((1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)^2 + 3\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - \frac{4}{3}\mathrm{i}\right) + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}\ .$$

(i) Geben Sie die Fourierreihe von f in komplexer Form an:

$$f(t) = \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \boxed{}$$

$$+ \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \boxed{} \cdot \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}$$

(ii) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f in reeller Form mit Sinus- und Kosinusgliedern:

$$f(t) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (*1+3+2=6 Punkte*)
Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1-t^2 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

(i) Skizzieren Sie f für $t \in [-3, 3]$.

(ii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}f)(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

(iii) Bestimmen Sie für die Faltung $f * \chi_{[-1,1]}$ von f mit dem Rechteckimpuls

$$\chi_{[-1,1]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t.$$

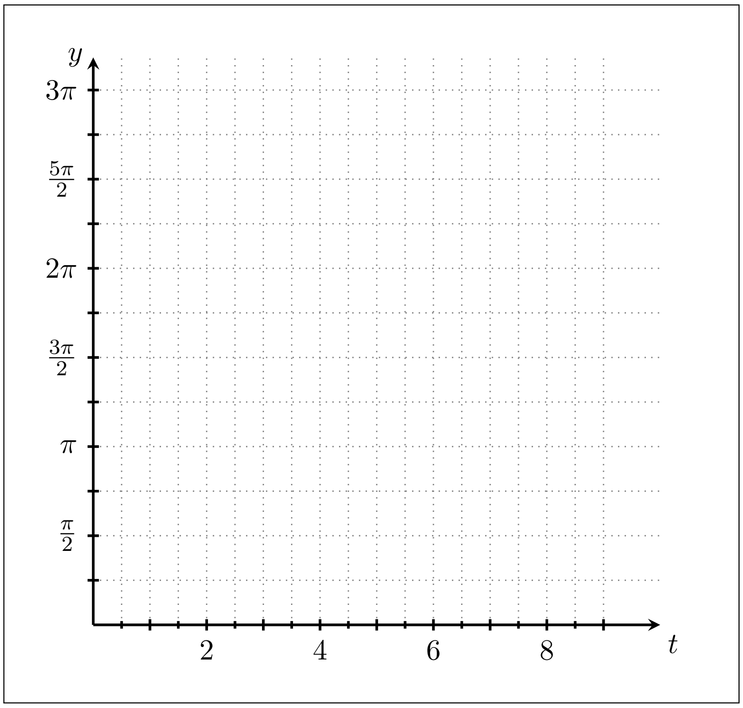
Aufgabe 5 (*2+(1+2)=5 Punkte*)

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(y(t))$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung.

Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



(ii) Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$.

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\mathrm{e} \cdot y + \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Aufgabe 7 *(1+1+1+2+2=7 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 + 2y_2 + \mathrm{e}^{at}, \quad y_2' = -2y_1 + ay_2 + 2\mathrm{e}^{at}, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

(iii) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare, homogene System $y' = Ay$ stabil?

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zu System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$y(t) =$