

Klausur zur Höheren Mathematik 3
für **Physiker, Kybernetiker und Mechatroniker**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben (oder alternativ eine DIN A4-Seite doppelseitig) sowie Zeichenmaterial.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- Es gibt insgesamt **11** Aufgaben.
 - In **den Aufgaben 1, 4, 5, 6, 9, 10, 11** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
 - Bei **den anderen Aufgaben 2, 3, 7, 8** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen mit Parametern $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^+$ können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.
Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{x}{2} - \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$	$\frac{x}{2} + \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$(\sin(x))^2$	$(\cos(x))^2$
$f(x)$	b^x	$\ln x $	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$	
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{a^2 - x^2}$	

- Die Prüfungsergebnisse werden über das C@MPUS-Portal bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 1** (5+2+3=10 Punkte)

(i) Sei $D := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq \sqrt{3}, \ln(u) \leq v \leq \ln(3u)\}$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -e^v \\ u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u^2 + e^v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.

Berechnen Sie den Flächeninhalt $O(F)$.

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 - y \\ -xy \\ -zx + y^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

(iii) Sei G die Fläche

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 2\},$$

deren Rand durch

$$C: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist mit Normalenvektor

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für f aus (ii) das Integral

$$\int_G \langle \operatorname{rot} f(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z) \rangle d(x, y, z)$$

über ein entsprechendes Wegintegral.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbf{n}(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung von G zeigt.

Aufgabe 2 (2+2+2=6 Punkte)

Betrachten Sie den auf der xy -Ebene liegenden Halbkegel

$$K := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 4, z \geq 0 \right\}$$

mit Dichte $\rho(x, y, z) = 3$.

(i) Schreiben Sie K als Normalbereich bezüglich der x -Achse:

$$K = \boxed{\phantom{K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 4, z \geq 0 \right\}}}$$

(ii) Geben Sie K in Zylinderkoordinaten bezüglich x an:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 4], r \in \boxed{}, \varphi \in \boxed{} \right\}$$

(iii) Geben Sie die Masse m und die x -Koordinate des Schwerpunktes $X_S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von K an:

$$m = \boxed{}$$

$$x = \boxed{}$$

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 3** (1+1= 2 Punkte)Die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(t) := ((1 - 2i)e^{2it} - e^{-2it})^2 + 3 \left(e^{4it} - \frac{4}{3}i \right) + (4i - 1)e^{-4it}.$$

(i) Geben Sie die Fourierreihe von f in komplexer Form an:

$$f(t) = \boxed{} \cdot e^{-4it} + \boxed{} \cdot e^{-3it} + \boxed{} \cdot e^{-2it} + \boxed{} \cdot e^{-it} + \boxed{}$$

$$+ \boxed{} \cdot e^{it} + \boxed{} \cdot e^{2it} + \boxed{} \cdot e^{3it} + \boxed{} \cdot e^{4it}$$

(ii) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f in reeller Form mit Sinus- und Kosinusgliedern:

$$f(t) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (1+3+2=6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 - t^2 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(i) Skizzieren Sie f für $t \in [-3, 3]$.(ii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}f)(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$.(iii) Bestimmen Sie für die Faltung $f * \chi_{[-1,1]}$ von f mit dem Rechteckimpuls

$$\chi_{[-1,1]}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t) dt.$$

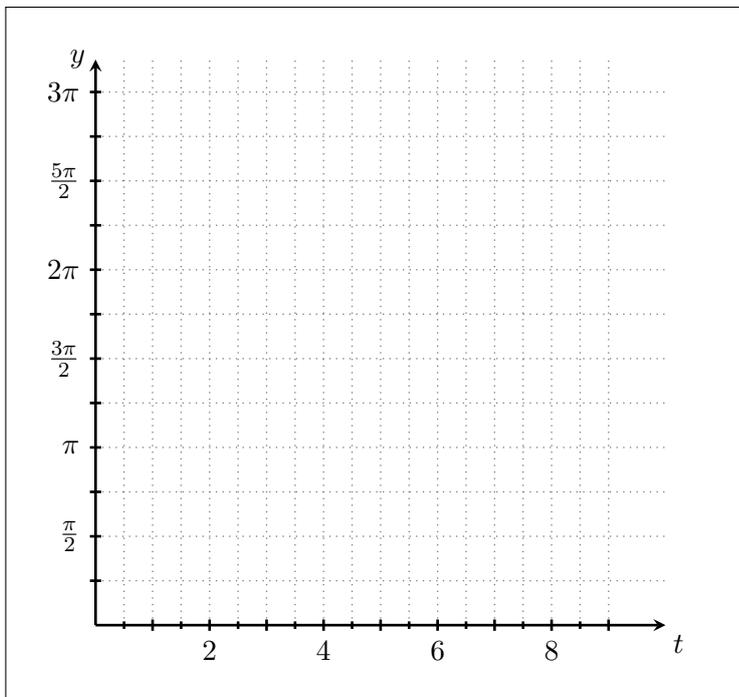
Aufgabe 5 ($2+(1+2)=5$ Punkte)

- (i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(y(t))$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung.

Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



- (ii) Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A .
- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -e \cdot y + e^{-t}, \quad y(0) = \frac{1}{e-1}$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 7** ($1+1+1+2+2=7$ Punkte)

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 + 2y_2 + e^{at}, \quad y_2' = -2y_1 + ay_2 + 2e^{at}, \quad (1)$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Schreiben Sie das System (1) in der Form
- $y' = Ay + b(t)$
- , mit
- $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
- und
- $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$
- .

- (ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

- (iii) Für welche Werte von
- $a \in \mathbb{R}$
- ist das lineare, homogene System
- $y' = Ay$
- stabil?

- (iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems
- $y' = Ay$
- an.

- (v) Bestimmen Sie die Lösung des zu System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung
- $y(0) = (0, 1)^T$
- .

 $y(t) =$

Name,
Vorname:Matrikel-
Nummer:**Aufgabe 10** (3+1+3=7 Punkte)

(i) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{4e}{z(z+1)^3}.$$

Klassifizieren Sie alle Singularitäten und bestimmen Sie die zugehörigen Residuen.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{|z|=4} f(z) dz$$

mit Funktion f aus Teilaufgabe (i).

(iii) Gegeben sei die Funktion

$$g(z) = (z^2 + 2z)e^{\frac{1}{z+1}}.$$

Klassifizieren Sie alle Singularitäten und bestimmen Sie die zugehörigen Residuen.

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Berechnen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x + 2} dx.$$

Denken Sie an das Überprüfen der Voraussetzungen!

Hinweis: Eine Nullstelle des Nenners ist -2 .