Aufgabe 1 *(5+2+3=10 Punkte)*

(i) Sei $D := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le u \le \sqrt{3}\,,\, \ln(u) \le v \le \ln(3u)\right\}$ und F die Fläche, welche durch

$$\rho\colon D \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^v \\ u \\ \frac{\sqrt{2}}{2}u^2 + \mathrm{e}^v \end{pmatrix}$$

parametrisiert ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt $O(F)$.

(ii) Gegeben sei das Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^2 - y \\ -xy \\ -zx + y^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\operatorname{div} f$ und $\operatorname{rot} f$.

(iii) Sei G die Fläche

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1 \text{ und } z = 2\right\},$$

deren Rand durch

$$C\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist mit Normalenvektor

$$\mathrm{n}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für f aus (ii) das Integral

$$\int\limits_G \Big\langle \operatorname{rot} f(x,y,z), \mathrm{n}(x,y,z) \Big\rangle \, \mathrm{d}(x,y,z)$$

über ein entsprechendes Wegintegral.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{n}(C(t)) \times C'(t)$ in Richtung von G zeigt.

(i) Wir berechnen zunächst

$$\frac{\partial \rho}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}u \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^v \\ 0 \\ \mathrm{e}^v \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix}0\\1\\\sqrt{2}u\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^v\\0\\\mathrm{e}^v\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^v\\-\sqrt{2}u\mathrm{e}^v\\\mathrm{e}^v\end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\left\|\frac{\partial\rho}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{\partial v}(u,v)\right\|=\sqrt{\mathrm{e}^{2v}+2u^2\mathrm{e}^{2v}+\mathrm{e}^{2v}}$$
$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^v\sqrt{1+u^2}$$

und somit

$$O(F)=\int\limits_F 1\,\mathrm{d}\sigma=\int\limits_D\left\|\frac{\partial\rho}{u}(u,v)\times\frac{\partial\rho}{v}(u,v)\right\|\mathrm{d}(u,v)$$

$$=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\int\limits_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\mathrm{e}^v\sqrt{2}\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+u^2}\int\limits_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+u^2}\left[\mathrm{e}^v\right]_{\ln(u)}^{\ln(3u)}\,\mathrm{d}u$$
$$=\sqrt{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}2u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Substitution: $\xi(u):=\left(1+u^2\right),\xi'(u)=2u$

$$=\sqrt{2}\int\limits_2^4\sqrt{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$=\sqrt{2}\left[\frac{2}{3}(\xi)^{\frac{3}{2}}\right]_2^4=\frac{16\sqrt{2}}{3}-\frac{8}{3}$$

(ii) Es gelten

$$\operatorname{div}f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(y^2-y\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(-xy\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(-zx+y^2\right))=-x-x=-2x$$

und

$$\operatorname{rot}f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}\left(-xz+y^2\right)-\frac{\partial f}{\partial z}\left(-xy\right)\\\frac{\partial f}{\partial z}\left(y^2-y\right)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(-xz+y^2\right)\\\frac{\partial f}{\partial x}\left(-xy\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\left(y^2-y\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y\\z\\1-3y\end{pmatrix}$$

(iii) Es gilt:

$$C'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten daher mit dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int\limits_G \langle \operatorname{rot} f(x,y,z), \mathrm{n}(x,y,z)\rangle \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \oint\limits_C \langle f(x,y,z),\, \mathrm{d}(x,y,z)\rangle \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \big\langle f(C(t)), C'(t)\big\rangle \;\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} (\sin(t))^2 - \sin(t) \\ -\cos(t)\sin(t) \\ -2\cos(t) + (\sin(t))^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \;\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} -(\sin(t))^3 + (\sin(t))^2 - (\cos(t))^2\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^{2\pi} -\sin(t) + (\sin(t))^2 \;\mathrm{d}t \\
&= \left[\cos(t) + \frac{1}{2}(t - \sin(t)\cos(t))\right]_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*2+2+2=6 Punkte*)
Betrachten Sie den auf der xy-Ebene liegenden Halbkegel

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4\sqrt{y^2+z^2} \le x \le 4\,,\; z \ge 0 \right\}$$

mit Dichte $\rho(x,y,z) = 3$.

(i) Schreiben Sie K als Normalbereich bezüglich der x-Achse:

$$K = \boxed{\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x \le 4\,,\; 0 \le z \le \frac{1}{4}x\,,\; -\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2} \le y \le \sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2} \right\}}$$

(ii) Geben Sie K in Zylinderkoordinaten bezüglich x an:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in [0,4]\,,\; r \in \boxed{\left[0, \frac{1}{4}x\right]}\,,\; \varphi \in \boxed{[0,\pi]} \right\}$$

(iii) Geben Sie die Masse m und die x-Koordinate des Schwerpunktes $X_S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ von K an:

$$m = \boxed{2\pi} \qquad x = \boxed{3}$$

(i) Mit $0 \leq 4\sqrt{y^2+z^2} \leq 4$ und $(x,0,0) \in K$ für $x \in [0,4]$ folgt $0 \leq x \leq 4$.
Für $y = 0$ folgt nun aus $0 \leq z$ und $4\sqrt{z^2} \leq x$ die Bedingung $0 \leq z \leq \frac{1}{4}x$. Die Grenzen für y ergeben sich nun aus der Bedingung

$$4\sqrt{y^2+z^2} \leq x \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{x^2}{16} - z^2$$

(ii) Die Grenzen für r ergeben sich aus

$$x \geq \sqrt{y^2+z^2} = r\,,$$

die für φ aus der Bedingung $z \geq 0$ (und somit $\sin(\varphi) \geq 0$).

(iii) m: Hier gibt es verschiedene Wege, die zum Ziel führen, beispielsweise:

- Berechnung mit (i):

$$m = \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} \int_{-\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}^{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}} 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} 2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \lim_{t \to \frac{1}{4}x} \left[\frac{1}{2} z\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2} + \frac{x^2}{32}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{16} - z^2}}\right)\right]_0^t \mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \lim_{t \to \frac{1}{4}x} \left(\frac{1}{2} t\sqrt{\frac{x^2}{16} - t^2} + \frac{x^2}{32}\arctan\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{x^2}{16} - 1}}\right)}_{\to\infty} - 0\right) \mathrm{d}x$$

$$= 6\int_0^4 \frac{x^2}{32} \cdot \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\pi\, x^3}{32}\right]_0^4 = 2\pi$$

- Berechnung mit (ii):

$$m = \int_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} \int_0^{\pi} \rho(x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x$$

$$= 3\pi \int_0^4 \int_0^{\frac{1}{4}x} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = 3\pi \int_0^4 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^3}{32}\right]_0^4 = 2\pi$$

x: Es gilt

$$x = \frac{\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}{\int\limits_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)}$$

Bestimmung des Zählers

- mit (i):

$$\begin{aligned}
\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} \int\limits_{-\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}^{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}} 3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&= 3\int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x} 2\cdot\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 x \lim_{t\to\frac{1}{4}x}\left[\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}+\frac{x^2}{32}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{16}-z^2}}\right)\right]_0^t \mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 x \lim_{t\to\frac{1}{4}x}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{x^2}{16}-t^2}+\frac{x^2}{32}\arctan\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}\cdot\frac{x^2}{16}-1}}\right)}_{\to\infty}-0\right)\mathrm{d}x \\
&= 6\int\limits_0^4 \frac{x^3}{32}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\pi\,x^4}{128}\right]_0^4 = \left(\frac{3\pi\cdot 2^{2\cdot 4}}{2^7}-0\right) = 6\pi
\end{aligned}$$

- mit (ii):

$$\begin{aligned}
\int\limits_K x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int\limits_0^4 x \int\limits_0^{\frac{1}{4}x}\int\limits_0^{\pi} \rho(x, r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x \\
&= 3\pi\int\limits_0^4 x\int\limits_0^{\frac{1}{4}x} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = 3\pi\int\limits_0^4 x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x \\
&= 3\pi\int\limits_0^4 \frac{x^3}{32}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3\pi\,x^4}{128}\right]_0^4 = 6\pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 *(1+1= 2 Punkte)*
Die 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf $[0, 2\pi)$ gegeben durch

$$f(t) := \left((1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\right)^2 + 3\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - \frac{4}{3}\mathrm{i}\right) + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} .$$

(i) Geben Sie die Fourierreihe von f in komplexer Form an:

$$f(t) = \boxed{4\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \boxed{-2}$$

$$+ \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \boxed{0} \cdot \mathrm{e}^{3\mathrm{i}t} + \boxed{-4\mathrm{i}} \cdot \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}$$

(ii) Bestimmen Sie die Fourierreihe von f in reeller Form mit Sinus- und Kosinusgliedern:

$$f(t) = \boxed{-2 + 8\sin(4t)}$$

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left((1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}}\right)^2 + 3\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - \frac{4}{3}\mathrm{i}\right) + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \\
&= \underbrace{(1-2\mathrm{i})^2}_{=-3-4\mathrm{i}} \mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 2(1-2\mathrm{i})\mathrm{e}^{0\cdot\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-4\cdot\mathrm{i}t} + 3\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 4\mathrm{i} + (4\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t} \\
&= -4\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t} - 2 + 4\mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}t}
\end{aligned}$$

(ii) Es gilt für $k \geq 0$:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \begin{cases} -4 & , k = 0 \\ 0 & , k > 0 \end{cases}$$

$$b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} \mathrm{i}(-4\mathrm{i} - 4\mathrm{i}) & , k = 4 \\ 0 & , k \neq 4 \end{cases} = \begin{cases} 8 & , k = 4 \\ 0 & , k \neq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 4 *(1+3+2=6 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1 - t^2 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(i) Skizzieren Sie f für $t \in [-3, 3]$.

(ii) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}f)(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

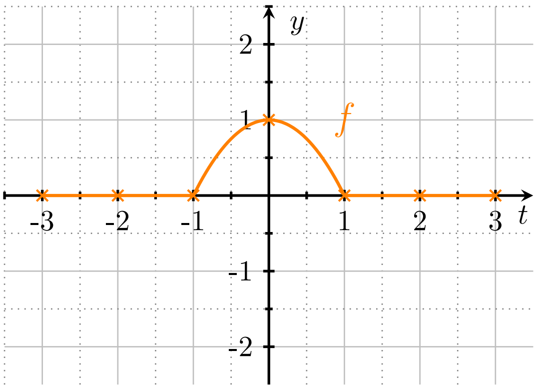
(iii) Bestimmen Sie für die Faltung $f * \chi_{[-1,1]}$ von f mit dem Rechteckimpuls

$$\chi_{[-1,1]} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t.$$

(i) Wir erhalten folgende Skizze:



(ii) Wir berechnen für $\omega \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-\mathrm{i}\omega}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \frac{2}{\mathrm{i}\omega}\int_{-1}^{1} t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$= -\left(\left[\frac{2}{\omega^2}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= -\left[\frac{2}{\omega^2}t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{2}{\mathrm{i}\omega^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{2}{\omega^2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right) - \frac{4}{\omega^3}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right)$$
$$= -\frac{4\cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(\omega)}{\omega^3}$$

Für $\omega = 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \tag{1}$$

Alternativer Lösungsweg:

(für $\omega \neq 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \left(\left[\frac{\mathrm{i}}{\omega}t^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{2\mathrm{i}t}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \left(\frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \left[\frac{-2t}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= -\frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \frac{2}{\omega^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} + \left[\frac{2\mathrm{i}}{\omega^3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]_{-1}^{1}\\
&= -\frac{4}{\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2} + \frac{4}{\omega^3}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2} = -\frac{4\cos(\omega)}{\omega^2} + \frac{4\sin(\omega)}{\omega^3}
\end{aligned}
$$

(iii) Es gilt

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot 0\cdot t}\,\mathrm{d}t = (\mathcal{F}(f*\chi_{[-1,1]}))(0) = (\mathcal{F}f)(0)\cdot(\mathcal{F}\chi_{[-1,1]})(0)
$$

Mit

$$
(\mathcal{F}\chi_{[-1,1]})(\omega) = 2\,\mathrm{sinc}(\omega)
$$

und (1) erhalten wir

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(f*\chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t = (\mathcal{F}f)(0)\cdot 2\,\mathrm{sinc}(0) = \frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{8}{3}.
$$

Alternativer Lösungsweg:
Es gilt mit $f(t)=0,\ |t|>1$:

$$
(f*\chi_{[-1,1]})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s
$$

für $s\in[-1,1]$ Hierbei gilt $\chi_{[-1,1]}(t-s)\neq 0$ nur für $1+t\geq s\geq -1+t$, d. h.

- $\chi_{[-1,1]}(t-s)=0$ für $t>2$ oder $t<-2$.
- Für $t\in[-2,0]$ genügt es, $-1\leq s\leq 1+t$ zu betrachten. (Für $s>1+t$ ist $f(s)=0$.)
- Für $t\in[0,2]$ genügt es, $1\geq s\geq -1+t$ zu betrachten. (Für $s<-1+t$ ist $f(s)=0$.)

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} (f * \chi_{[-1,1]})(t)\,\mathrm{d}t &= \int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-1}^{1} f(s)\chi_{[-1,1]}(t-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{-2}^{0}\int\limits_{-1}^{1+t} (1-s^2)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-1+t}^{1} (1-s^2)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{-2}^{0} \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1}^{1+t} \mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{-1+t}^{1} \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_{-2}^{0} (1+t) - \frac{(1+t)^3}{3} + \frac{2}{3}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} \frac{2}{3} - (-1+t) + \frac{(-1+t)^3}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{(1+t)^2}{2} - \frac{(1+t)^4}{12} + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{2}{3}t - \frac{(-1+t)^2}{2} + \frac{(-1+t)^4}{12}\right]_{0}^{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

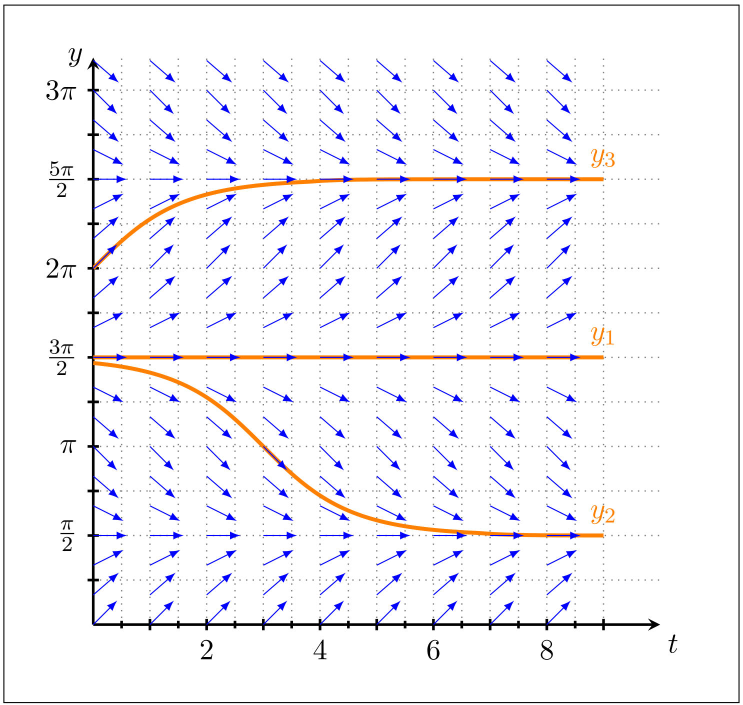
Aufgabe 5 *(2+(1+2)=5 Punkte)*

(i) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der skalaren Differentialgleichung

$$y'(t) = \cos(y(t))$$

und zeichnen Sie eine mögliche Lösung der Gleichung.

Verwenden Sie hierfür das nachfolgend bereitgestellte Koordinatensystem.



y_1, y_2, y_3: Drei Beispiele für mögliche Lösungen.

(ii) Gegeben sei das folgende Differentialgleichungssystem

$$y'(t) = Ay(t), \quad A := \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörigen linear unabhängigen Eigenvektoren der Matrix A.

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für reelle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y'(t) = Ay(t)$.

(i) Skizze des Richtungsfeld mit möglichen Lösungen y_1, y_2, y_3: Siehe Abbildung. Erkennen der Nullstellen $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ...)$ liefert konstante Lösungen.

(ii) a) Doppelter Eigenwert $\lambda = -2$ mit Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Wir berechnen ein Fundamentalsystem gemäß Fall c aus Vorlesung:

$$(A - \lambda I)w = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich zum Beispiel der Nebenvektor $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier ist zu beachten: Der zweite Eintrag des Vektors kann beliebig gewählt werden!

Dies wird nun in die entsprechende Formel eingesetzt:

$$\left\{ \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 6 (*4 Punkte*)
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = -\mathrm{e} \cdot y + \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}$$

mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y'(t) = -\mathrm{e}y(t)$. Durch Separation erhalten wir

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} \,\mathrm{d}t = \int -\mathrm{e} \,\mathrm{d}t$$
$$\ln |y(t)| = -\mathrm{e}t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Anwenden der Exponentialfunktion und Auflösen des Betrages liefern die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_h(t) = K\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Alternativer Lösungsweg:
y_h ergibt sich auch direkt aus unserer allgemeinen Lösungstheorie.

Um nun eine Lösung der DGL $y' = -\mathrm{e}y + \mathrm{e}^{-t}$ zu bestimmen, verwenden wir den Ansatz $y(t) = K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}$ (Variation der Konstanten). Dann ist

$$y'(t) = K'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} - \mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}$$

Wir setzen diese Ausdrücke für $y(t)$ und $y'(t)$ in die ursprüngliche DGL ein:

$$\begin{aligned} &K'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} - \mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} = -\mathrm{e}K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} + \mathrm{e}^{-t} \\ &\Longleftrightarrow K'(t) = \mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t} \\ &\Longrightarrow K(t) = \int K'(t)\mathrm{d}t = \int (\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t})\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t}}{\mathrm{e}-1} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet folglich

$$\begin{aligned} y(t) = K(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} &= \left(\frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{e}t}}{\mathrm{e}-1} + C \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{e}t} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1} + C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}t}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $C = 0$, da

$$\frac{1}{\mathrm{e}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}-1} + C.$$

Insgesamt ergibt sich somit die Lösung

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}-1}.$$

Aufgabe 7 *(1+1+1+2+2=7 Punkte)*
Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = ay_1 + 2y_2 + \mathrm{e}^{at}, \quad y_2' = -2y_1 + ay_2 + 2\mathrm{e}^{at}, \tag{1}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

(i) Schreiben Sie das System (1) in der Form $y' = Ay + b(t)$, mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$.

$$y' = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} y + e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = Ay + b(t) \text{ mit } A := \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \text{ und } b(t) := e^{at}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Begründen Sie, ob das System (1) autonom ist.

Weil (1) von der Form $y' = f(t, y)$ ist und $t \mapsto f(t, y) := Ay + b(t)$ nicht konstant ist für ein (alle) $y \in \mathbb{R}^2$, ist (1) nicht autonom.

(iii) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist das lineare, homogene System $y' = Ay$ stabil?

$$a < 0$$

(iv) Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des homogenen Systems $y' = Ay$ an.

$$\left\{ e^{at}\begin{pmatrix} \cos(-2t) \\ \sin(-2t) \end{pmatrix}, e^{at}\begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} \right\} = \left\{ e^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, e^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right\}$$

(v) Bestimmen Sie die Lösung des zu System (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$.

$$y(t) = e^{at}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sin(2t) - \cos(2t) + 1 \\ \sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(iii) Aufgrund von Satz 17.3.5 (Kapitel 17.3.3 Stabilität linearer DGL-Systeme) ist das homogene System $y' = Ay$ stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben. Da die Eigenwerte von A gegeben sind durch

$$a + 2\mathrm{i} \quad \text{und} \quad a - 2\mathrm{i}\,,$$

ist das homogene System stabil genau dann, wenn $a < 0$.

(iv) Hier greift Fall b aus dem Skript. Zunächst ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Eigenwerten $a \pm 2\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Weiter ist ein Eigenvektor v von $A = aI + J$ zum Eigenwert $a + \mathrm{i}$ gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \alpha + \mathrm{i}\beta \quad \text{mit} \quad \alpha := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \beta := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Aufgrund von Satz 17.3.4 ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$ daher gegeben durch

$$\begin{aligned} &\left\{\mathrm{e}^{at}(\alpha\cos(2t) - \beta\sin(2t)), \mathrm{e}^{at}(\alpha\sin(2t) + \beta\cos(2t))\right\} \\ &= \left\{\mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Da

$$A = aI + J \quad \text{mit} \quad I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und J offensichtlich mit I (Einheitsmatrix!) vertauscht/kommutiert, gilt nach Satz 17.3.10 (Eigenschaften des Matrixexponentials)

$$\mathrm{e}^{At} = e^{aIt}e^{Jt} = e^{at}e^{Jt}.$$

Weiter gilt mit Aufgabe 9.1

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos(-2t) & -\sin(-2t) \\ \sin(-2t) & \cos(-2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$$

(Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel t).

Alternativer Lösungsweg:

Alternativ kann man mit Aufgabe 9.1 das Matrixexponential e^{At} auch direkt ausrechnen - in dieser Aufgabe wurde nämlich $\mathrm{e}^{\tilde{A}t}$ berechnet mit $\tilde{A} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Aufgrund von Satz 17.3.12 (Zusammenhang zwischen Matrixexponential und Fundamentalsystemen) bilden die Spalten von

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{at}\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos(2t) & \mathrm{e}^{at}\sin(2t) \\ -\mathrm{e}^{at}\sin(2t) & \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $y' = Ay$.

$$\left\{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \\ -\mathrm{e}^{at}\sin(2t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{at}\sin(2t) \\ \mathrm{e}^{at}\cos(2t) \end{pmatrix}\right\}$$

(v) Aufgrund von Korollar 17.3.14 ist die Lösung y des zu (1) gehörigen Anfangswertproblems mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ mit $y_0 := (0,1)^\top$ gegeben durch

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{At} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} \underbrace{b(s)}_{=\mathrm{e}^s} \,\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2(t-s)) & \sin(2(t-s)) \\ -\sin(2(t-s)) & \cos(2(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2(t-s)) + 2\sin(2(t-s)) \\ -\sin(2(t-s)) + 2\cos(2(t-s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sin(2(t-s)) + \cos(2(t-s)) \\ -\frac{1}{2}\cos(2(t-s)) - \sin(2(t-s)) \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sin(2t) - \cos(2t) + 1 \\ \sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Alternativer Lösungsweg:
(für das alternative Fundamentalsystem)

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{e}^{At} y_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-s)} b(s) \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(-2(t-s)) & -\sin(-2(t-s)) \\ \sin(-2(t-s)) & \cos(-2(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(-2(t-s)) - 2\sin(-2(t-s)) \\ \sin(-2(t-s)) + 2\cos(-2(t-s)) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} -\sin(-2t) \\ \cos(-2t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(-2(t-s)) + \cos(-2(t-s)) \\ -\frac{1}{2}\cos(-2(t-s)) + \sin(-2(t-s)) \end{pmatrix} \Bigg|_{s=0}^{s=t} \\
&= \mathrm{e}^{at} \begin{pmatrix} \frac{-3}{2}\sin(-2t) - \cos(-2t) + 1 \\ -\sin(-2t) + \frac{3}{2}\cos(-2t) - \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8 (*1+1+1=3 Punkte*)
Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mittels

$$f(x+\mathrm{i}y) := \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{e}^y - 2y + \mathrm{i}\cdot x\mathrm{e}^y\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Bestimmen Sie:

$$\partial_x\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{x} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{\mathrm{e}^y - 2}$$

$$\partial_x\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{\mathrm{e}^y} \qquad \partial_y\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \boxed{x\mathrm{e}^y}$$

(ii) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist f komplex differenzierbar in z?

$$z \in \boxed{\left\{w \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(w) = 0\right\}}$$

(iii) Sei C die durch $z\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}\,,\ t \mapsto 2\mathrm{i}t$ parametrisierte Kurve. Bestimmen Sie:

$$\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \boxed{(\mathrm{e}^{2\pi} - 4\pi^2 - 1)\mathrm{i}}$$

(ii) Zuerst bemerken wir, dass $\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y)) = \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{e}^y - 2y$ und $\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y)) = x\mathrm{e}^y$ reell differenzierbar sind für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Die CR-Differentialgleichungen – $\partial_x\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = \partial_y\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right)$ und $\partial_y\left(\mathrm{Re}(f(x+\mathrm{i}y))\right) = -\partial_x\left(\mathrm{Im}(f(x+\mathrm{i}y))\right)$ – implizieren nun:

$$\begin{aligned} x &= x\mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^y &= 2 - \mathrm{e}^y \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $\mathrm{e}^y = 1$ und somit $y = 0$.
Die Gleichung $x = x\mathrm{e}^0$ ist für alle x erfüllt.

(iii) Mit

$$f(2\mathrm{i}t) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + \mathrm{e}^{2t} - 2\cdot 2t + \mathrm{i}\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{2t}$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^\pi f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t \int_0^\pi f(2\mathrm{i}t)\cdot 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{e}^{2t} - 4t\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}\left[\mathrm{e}^{2t} - 4t^2\right]_0^\pi \\ &= (\mathrm{e}^{2\pi} - 4\pi^2 - 1)\mathrm{i} \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (*4+1=5 Punkte*)

(i) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{\sin(z)+2}{z-3} + \frac{2\pi}{1-z} \right) \mathrm{d}z \,.$$

Denken Sie bei Verwendung von Sätzen oder Formeln an das Überprüfen aller Voraussetzungen!

(ii) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \sin(z).$$

Begründen Sie, weshalb der Satz von Liouville nicht anwendbar auf $f(z)$ ist.

(i) Wir schauen beide Summanden des Integrals getrennt an:

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{\sin(z)+2}{z-3} + \frac{2\pi}{1-z} \right) \mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \left(\frac{\sin(z)+2}{z-3} \right) \mathrm{d}z + \oint_{|z|=2} \left(\frac{2\pi}{1-z} \right) \mathrm{d}$$

Für den ersten Summanden passt auf den ersten Blick der Cauchy'sche Integralsatz, daher überprüfen wir die Voraussetzungen: Wir wählen ein Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < \frac{5}{2} \right\},$$

welches einfach zusammenhängend ist, sowie $f : D \to \mathbb{C}$.
Die Kurve (Kreis mit Radius 2) verläuft in D und ist geschlossen.

Da $z = 3$ außerhalb des Kreises mit Radius 2 liegt und wir CIS anwenden dürfen (der Integrand ist holomorph auf D), erhalten wir als Ergebnis 0.

Für den zweiten Summanden passt auf den ersten Blick die Cauchy Integralformel, daher überprüfen wir die Voraussetzungen:

Wir wählen ein passendes Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{ z \in \mathbb{C} \,|\, z < 10 \}.$$

Die Funktion

$$f : D \to \mathbb{C}, t \mapsto 2\pi$$

ist holomorph, D ist offen und der abgeschlossene Ball mit Radius 2 und Mittelpunkt $z_0 = 1$ liegt in D.

Alternativer Lösungsweg:
(für die Voraussetzungen von CIF)
Allgmeine Version: Wir wählen D und f wie oben. D ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und C (Kreis mit Radius 2) ein geschlossener, doppelpunktfreier Weg in D, der den Punkt $z_0 = 1$ umschließt.

Daher dürfen wir CIF anwenden:

$$\begin{aligned} 2\pi \mathrm{i} f(1) &= \oint_{|\xi|=2} \frac{f(\xi)}{\xi - 1} \mathrm{d}\xi \\ 4\pi^2 \mathrm{i} &= \oint_{|\xi|=2} \frac{2\pi}{\xi - 1} \mathrm{d}\xi \\ -4\pi^2 \mathrm{i} &= \oint_{|\xi|=2} \frac{2\pi}{1 - \xi} \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Insgesamt gilt demnach:

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{\sin(z) + 2}{z - 3} + \frac{2\pi}{1 - z} \right) \mathrm{d}z = -4\pi^2 \mathrm{i}$$

Alternativer Lösungsweg:

Alternativ kann man den Residuensatz anwenden. Dafür müssen aber auch die Voraussetzungen des Satzes kontrolliert werden: Wir wählen wieder ein Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 10 \}.$$

Die zu integrierende Funktion

$$f(z) = \left(\frac{\sin(z) + 2}{z - 3} + \frac{2\pi}{1 - z} \right)$$

ist holomorph: Da die Sinusfunktion ebenso wie konstante Funktionen holomorph sind, sind es die Zähler ebenfalls. Die Nenner sind Polynomfunktionen. Daher ist die Funktion holomorph auf D bis auf endlich viele Punkte.

Der Kreis mit Radius 2 liegt in D und ist eine glatte, geschlossene Kurve, welche zusätzlich doppelpunktfrei und so parametrisiert werden kann, dass D links zur Durchlaufrichtung liegt.

Man darf demnach den Residuensatz anwenden.

Da $z_0 = 3$ nicht im umschlossenen Gebiet liegt, kann dieses Residuum ignoriert werden. Für $z_0 = 1$ ergibt sich das folgende Reisduum:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(f; z_0) &= \left((z-1) \cdot \left(\frac{\sin(z) + 2}{z - 3} + \frac{2\pi}{1 - z} \right) \right) \Bigg|_{z=z_0} \\ &= \left(\left(\frac{\sin(z) z}{z - 3} - \frac{\sin(z)}{z - 3} + \frac{2z}{z - 3} - \frac{2}{z - 3} + \frac{2\pi(z-1)}{1 - z} \right) \right) \Bigg|_{z=z_0} \\ &= \left(\frac{-2\pi(1 - z)}{1 - z} \right) \Bigg|_{z=z_0} = -2\pi \end{aligned}$$

Fügt man dieses Residuum in die Formel des Residuensatzes, folgt das Ergebnis wie oben.

(ii) Die Sinus-Funktion ist im Komplexen nicht beschränkt, so gilt beispielsweise für $r \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(r\mathrm{i})| = \left| \frac{\mathrm{e}^{-r} - \mathrm{e}^{r}}{2\mathrm{i}} \right| \stackrel{|r|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Dies ist aber eine Voraussetzung des Satzes von Liouville.

Aufgabe 10 (*3+1+3=7 Punkte*)

(i) Gegeben sei die Funktion

$$f(z) = \frac{4\mathrm{e}}{z(z+1)^3}\,.$$

Klassifizieren Sie alle Singularitäten und bestimmen Sie die zugehörigen Residuen.

(ii) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{|z|=4} f(z)\mathrm{d}z$$

mit Funktion f aus Teilaufgabe (i).

(iii) Gegeben sei die Funktion

$$g(z) = (z^2+2z)\mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}}.$$

Klassifizieren Sie alle Singularitäten und bestimmen Sie die zugehörigen Residuen.

(i) Singularitäten liegen vor in $z_0 = 0$ und in $z_0 = -1$.

$z_0 = 0$: Pol (erster Ordnung) Wir berechnen das Residuum mit Satz 18.6.6 (i):

$$\lim_{z\to 0} \frac{4\mathrm{e}}{(z+1)^3} = 4\mathrm{e}$$

$z_0 = -1$: Pol (dritter Ordnung), Wir berechnen das Residuum für -1 mit Satz 18.6.6 (ii):

$$h(z) = \frac{4\mathrm{e}}{z}$$
$$h'(z) = \frac{-4\mathrm{e}}{z^2}$$
$$h''(z) = \frac{8\mathrm{e}}{z^3}$$

Damit ist das Residuum

$$\operatorname{res}(f;-1) = \frac{1}{2!}(-8\mathrm{e}) = -4\mathrm{e}$$

$z_0 = 0$

(ii) Voraussetzungen des Residuensatzes:

Wir wählen ein Gebiet D wie zum Beispiel

$$D := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 10\}.$$

Die zu integrierende Funktion

$$f(z) = \left(\frac{4\mathrm{e}}{z(z+1)^3}\right)$$

ist Quotient aus einer konstanten Funktion sowie einer Polynomfunktion. Daher ist die Funktion holomorph auf D bis auf endlich viele Punkte. Der Kreis mit Radius 4 liegt in D und ist eine glatte, geschlossene Kurve, welche zusätzlich doppelpunktfrei und so parametrisiert werden kann, dass das umschlossene Gebiet links zur Durchlaufrichtung liegt.

Mit dem Residuensatz und (i) folgt:

$$\int_{|z|=4} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(-4\mathrm{e} + 4\mathrm{e}) = 0$$

(iii) Um die Singularität zu klassifizieren und das Residuum abzulesen, entwickeln wir die Laurentreihe.

$$\begin{aligned} g(z) &= (z^2 + 2z)\mathrm{e}^{\frac{1}{z+1}} \\ &= ((z+1)^2 - 1)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-k}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-k+2}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-k}}{k!} \\ &= \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{(z+1)^{-k}}{(k+2)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{-k}}{k!} \end{aligned}$$

Wir betrachten die Koeffizienten mit negativen Indizes. Für $k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} a_{-k} &= \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k)!} = \frac{1 - (k+2)(k+1)}{(k+2)!} \\ &= \frac{-k^2 - 3k - 1}{(k+2)!} \end{aligned}$$

Diese Folge verschwindet nicht, wie sich beispielsweise wie folgt feststellen lässt:

Variante 1: $a_{-k} \neq 0$ für alle $k \geq 1$, da der Nenner größer 0 ist und Nullsetzen des Zählers keine positive Lösung liefert, siehe z.B. Mitternachtsformel:

$$-\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} < 0$$

Variante 2: Der Zähler ist ein Polynom dritten Grades in k und hat daher nur endlich viele Nullstellen, für $k \to \infty$ kann daher keine davon angenommen werden (für hinreichend große k)

Variante 3: Es gilt $(k+2)! > k!$ für $k \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{k!} < 0$ für k hinreichend klein.

All diese Varianten zeigen, dass eine wesentliche Singularität vorliegt.

Gemäß der Definition ist das Residuum $a_{-1} = \frac{1}{6} - 1 = \frac{-5}{6}$.

Aufgabe 11 (*5 Punkte*)
Berechnen Sie das folgende Integral mittels Residuensatz:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x + 2}\mathrm{d}x.$$

Denken Sie an das Überprüfen der Voraussetzungen!
Hinweis: Eine Nullstelle des Nenners ist -2.

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen des Nenners finden: $z = -2$ ist gegeben, wir machen mit dieser nun eine Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 + 2x^2 + x + 2\Big) \operatorname{div} \Big(x+2\Big) = x^2 + 1 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad x + 2 \\
\qquad\quad \underline{-\,x - 2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Somit gibt es Pole der Ordnung 1 bei $-2, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.
Die Anwendung des Satzes 18.7.2 begründen wir mittels der Bemerkung aus dem Skript zu diesem: Die gegebene Funktion ist eine rationale Funktion $f = \frac{P}{Q}$ mit

$$3 = \mathrm{Grad}(Q) \geq \mathrm{Grad}(P) + 2 = 0 + 2 = 2\,.$$

Ferner ist sie holomorph auf $[0, \infty)$, da die drei Nullstellen des Nenners nicht in dieser Menge liegen. Daher können wir den Ansatz

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^m \mathrm{res}(f(z)\ln(z); z_k)$$

verwenden. Hier kommt der ln vor. Da dessen Holomorphie auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ sicher gestellt sein soll, muss das Argument aus $(0, 2\pi)$ sein. Die Residuen lassen sich mit dem Ansatz $\frac{g}{h'}$ berechnen.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{res}\left(\frac{\ln(z)}{z^3 + 2z^2 + z + 2}; -2\right) &= \frac{\ln(-2)}{5} = \frac{\ln(2) + \pi\mathrm{i}}{5} \\
\mathrm{res}\left(\frac{\ln(z)}{z^3 + 2z^2 + z + 2}; \mathrm{i}\right) &= \frac{\ln(\mathrm{i})}{4\mathrm{i} - 2} = \frac{\ln(1) + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}}{4\mathrm{i} - 2} = \frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}{4\mathrm{i} - 2} \\
\mathrm{res}\left(\frac{\ln(z)}{z^3 + 2z^2 + z + 2}; -\mathrm{i}\right) &= \frac{\ln(-\mathrm{i})}{-4\mathrm{i} - 2} = \frac{\ln(1) + \frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}{-4\mathrm{i} - 2} = \frac{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}{-4\mathrm{i} - 2}
\end{aligned}
$$

Wir setzen die Residuen in die Formel ein und vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x + 2}\mathrm{d}x &= -\left(\frac{\ln 2 + \pi\mathrm{i}}{5} + \frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}{4\mathrm{i} - 2} + \frac{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}{-4\mathrm{i} - 2}\right) \\
&= -\frac{\ln 2 + \pi\mathrm{i}}{5} - \frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}{4\mathrm{i} - 2} - \frac{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}}{-4\mathrm{i} - 2} \\
&= -\frac{4\ln(2) + 4\pi\mathrm{i}}{20} - \frac{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}(-4\mathrm{i} - 2)}{20} + \frac{\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}(4\mathrm{i} - 2)}{20}) \\
&= \frac{4\pi - 4\ln(2)}{20} = \frac{\pi - \ln(2)}{5}
\end{aligned}
$$