Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP)

13. März 2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 5\cos(2\pi n)$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \dfrac{2^n + n^2}{2^n + n^3}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \ln\left(\left(1 + \dfrac{1}{4n}\right)^{28n}\right)$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{10^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom positiven Parameter $a \in (0, +\infty)$ abhängige Funktion:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{4x - a}{2x - 1} & \text{für } x < 0, \\ e^{-ax} + 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

(c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Der Tangens hyperbolicus $\tanh$ ist folgendermaßen definiert:

$$\tanh : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\tanh(\ln(2))$.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung des Tangens hyperbolicus.

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte des Tangens hyperbolicus.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom des Tangens hyperbolicus vom Grad 1 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion $r : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r(x) = \frac{5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

(a) Finden Sie den maximalen Definitionsbereich D von r.

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^2 r(x)\, dx.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** (a) Finden Sie eine rationale Funktion R mit

$$\int x^3 \ln(x^2)\, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln(x^2) - \int R(x)\, dx.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^3 \ln(x^2)\, dx$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Aufgabe 8 (3 + 1 Punkte)**.** (a) Finden Sie die Inverse der folgenden Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Machen Sie eine Probe.

Aufgabe 9 (4 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Aufgabe 10 (5 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2-x}.$$

(a) Finden Sie alle lokalen Maximalstellen von f im offenen Intervall $(0, 4)$.

(b) Finden Sie alle globalen Minimalstellen von f im abgeschlossenen Intervall $[0, 4]$.

(c) Finden Sie alle Wendepunkte von f.

Aufgabe 11 (6 Punkte). Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + xy^2 - 4x.$$

(a) Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(1, 0)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal-/Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Aufgabe 12 (5 Punkte). Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 6y^2, \qquad g(x, y) = (x - 2)^2 + y^2 - 1.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f bzw. g.

(b) Finden Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Aufgabe 13 (4 Punkte). Finden Sie die Lösung folgender Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

$$y'' - 7y' + 10y = 0 \quad \text{mit } y(0) = 4 \text{ und } y'(0) = 11.$$