Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP)
mit Lösungen

13. März 2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!
(Bepunktung: Folgefehler werden berücksichtigt. Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{6n^3+n^2}{3n^3+2n+1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 5\cos(2\pi n)$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \dfrac{2^n+n^2}{2^n+n^3}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \ln\left(\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{28n}\right)$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{6n^3+n^2}{3n^3+2n+1} = \frac{n^3\left(6+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{6+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6+0}{3+0+0} = 2.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos(2\pi n) = 1.$$

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 5.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \frac{2^n+n^2}{2^n+n^3} = \frac{2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)} = \frac{1+\frac{n^2}{2^n}}{1+\frac{n^3}{2^n}}.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n} = 0.$$

Dementsprechend haben wir

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

(d) Per Definition der eulerschen Zahl e gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{28n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^7 = e^7.$$

Da der Logarithmus eine stetige Funktion ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \ln(e^7) = 7.$$ □

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{10^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$

Lösung. (Bepunktung: 2 Punkte für jede korrekt ausgerechnete Reihe. 1 Punkt, falls mindestens ein grundsätzlicher Schritt des Rechenwegs korrekt ist. 0 Punkte, wenn keine richtige Idee im Rechenweg zu erkennen ist.)

(a) Wegen der geometrischen Reihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{10^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3^2}{10}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 10.$$

(b) Wegen der Exponentialreihe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} = 5 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^m}{m!} = 5\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{m!} - \frac{2^1}{1!} - \frac{2^0}{0!}\right) = 5(\mathrm{e}^2 - 3).$$

□

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom positiven Parameter $a \in (0, +\infty)$ abhängige Funktion:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{4x - a}{2x - 1} & \text{für } x < 0, \\ e^{-ax} + 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

(c) Bestimmen Sie die Asymptoten von f für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

Lösung. (Bepunktung: Aufgrund eines Tippfehlers stand $\frac{4x+a}{2x-1}$ statt $\frac{4x-a}{2x-1}$ im Klausurtext. Das muss und wird in der Korrektur berücksichtigt werden.)

(a) (Bepunktung: 1 Punkt pro Grenzwert.) Es gilt

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x - a}{2x - 1} = \frac{4 \cdot 0 - a}{2 \cdot 0 - 1} = a$$

und

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{-ax} + 1\right) = e^{-a \cdot 0} + 1 = 2.$$

(b) (Bepunktung: 1 Punkt.) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die zwei Grenzwerte übereinstimmen, also wenn $a = 2$.

(c) (Bepunktung: 1 Punkt.) Wegen $a > 0$ gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-ax} + 1\right) = 1$$

also besitzt f die horizontale Asymptote $y = 1$ für $x \to +\infty$.

(Bepunktung: 1 Punkt.) Für $x \to -\infty$ gilt

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x - a}{2x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - \frac{a}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = 2,$$

also besitzt f die horizontale Asymptote $y = 2$ für $x \to -\infty$. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Der Tangens hyperbolicus tanh ist folgendermaßen definiert:

$$\tanh\colon D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\tanh(\ln(2))$.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung des Tangens hyperbolicus.

(c) Finden Sie alle kritischen Punkte des Tangens hyperbolicus.

(d) Berechnen Sie das Taylorpolynom des Tangens hyperbolicus vom Grad 1 an der Entwicklungsstelle $a = 0$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für $e^{2\ln(2)} = 4$.) Es gilt

$$e^{2\ln(2)} = e^{\ln(2^2)} = e^{\ln(4)} = 4$$

und damit

$$\tanh(\ln(2)) = 1 - \frac{2}{4+1} = \frac{3}{5}.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkte) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\tanh'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt) Ein kritischer Punkt einer Funktion f ist ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Wegen $e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stets $\tanh'(x) \neq 0$: Der Tangens hyperbolicus besitzt keine kritischen Punkte.

(d) (Bepunktung: 1 Punkt) Das Taylorpolynom des Tangens hyperbolicus vom Grad 1 ist gegeben durch

$$\tanh(0) + \tanh'(0)x = \left(1 - \frac{2}{e^{2\cdot 0}+1}\right) + \left(\frac{4e^{2\cdot 0}}{(e^{2\cdot 0}+1)^2}\right)x = x. \qquad \square$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion $r\colon\ D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r(x) = \frac{5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

(a) Finden Sie den maximalen Definitionsbereich D von r.

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\,dx.$$

(d) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^2 r(x)\,dx.$$

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt) Es gilt $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x+1)^2$. Die Funktion r ist daher auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ wohl definiert.

(b) (Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für einen sinnvollen Schritt.) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x} &= \frac{Ax(x+1) + Bx + C(x+1)^2}{x(x+1)^2}\\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + C}{x(x+1)^2}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A + C = 5$ und $A + B + 2C = 7$ und $C = 3$, also $A = 2$, $B = -1$ und $C = 3$:

$$r(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x}.$$

(c) (Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für einen sinnvollen Schritt) Wir haben

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{3}{x}\,dx = 2\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + 3\ln(x).$$

(d) (Bepunktung: 1 Punkt) Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 r(x)\,dx &= \left(2\ln(2+1) + \frac{1}{2+1} + 3\ln(2)\right) - \left(2\ln(1+1) + \frac{1}{1+1} - 3\ln(1)\right)\\ &= 2\ln(3) + \ln(2) - \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6 (4 Punkte). (a) Finden Sie eine rationale Funktion R mit

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int R(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^3 \ln(x^2)\,dx$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für ‘partielle Integration’, und noch 0,5 Punkte für jeden sinnvollen Schritt (bis 1,5 Punkte).) Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$ mit $u(x) = \frac{1}{4}x^4$ und $v(x) = \ln(x^2)$ liefert

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^3\,dx.$$

(Bepunktung: 0,5 Punkte, falls die Antwort eine rationale Funktion ist) Daher ist die Antwort

$$R(x) = \frac{1}{2}x^3.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für jeden sinnvollen Schritt (bis 1,5 Punkte).) Aus (a) erhalten wir

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \frac{1}{8}x^4 + C.$$

(Bepunktung: Kein Punktabzug, falls “$+C$” fehlt.) **Probe.** Wir nennen die gefundene Stammfunktion F:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \frac{1}{8}x^4.$$

Mit der Produkt- bzw. Kettenregel leiten wir F ab und erhalten

$$F'(x) = x^3 \ln(x^2) + \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{2}x^3 = x^3 \ln(x^2).$$ □

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte für das korrekte Ergebnis. Sonst 1 Punkt für eine korrekte Anwendung der Definition von Determinante.) Wir wenden die Definition von $\det(A)$ an:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 0 \cdot 0 + a^2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot (-a) - 1 \cdot (-a) \cdot 1 - a^2 \cdot a \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

(b) (Bepunktung: 1 Punkt.) Der Rang von A ist gleich 3 genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, also für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) (Bepunktung: 1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für das korrekte Einsetzen von $a = 0$.) Wir setzen $a = 0$ ein und bekommen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und hat 2 Pivots, also ist ihr Rang gleich 2. □

Aufgabe 8 (3 + 1 Punkte). (a) Finden Sie die Inverse der folgenden Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Machen Sie eine Probe.

Lösung. (a) Wir fangen mit der erweiterten Matrix $(B|I)$ an, wobei I die Identitätsmatrix bezeichnet:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es sei $\mathbf{z}_i$ die i-te Zeile. Wir tauschen $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nun tauschen wir $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren $\mathbf{z}_2$ mit -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Inverse von B ist also gegeben durch

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Bepunktung:

- Mindestens 2 Punkte, falls eine Spalte von B^{-1} korrekt ausgerechnet wurde.
- Bis zu 2 Punkte für sinnvolle Schritte.
- 1 Punkt, falls $\det(B) = -1$ korrekt ausgerechnet wurde.
- 3 Punkte nur wenn alles richtig ist.

)

(b) (Bepunktung: 1 Punkt, falls die zwei Matrizen korrekt multipliziert werden.) Als Probe multiplizieren wir die zwei Matrizen und erhalten die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Aufgabe 9 (4 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt.) Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (6-\lambda)(4-\lambda) - 5 \cdot 3 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 9 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 9). \end{aligned}$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Die Eigenwerte von C sind also 1 und 9.

(b) (Bepunktung: 1 Punkt.) Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 1$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - E = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $5x_1 = -3x_2$. Also gilt

$$V_1 = \operatorname{Ker}(C - E) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}).$$

(Bepunktung: 1 Punkt.) Wir berechnen den Eigenraum V_λ mit $\lambda = 9$. Dafür betrachten wir die Matrix

$$C - \lambda E = C - 9E = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2)^\intercal$ mit $x_1 = x_2$. Also gilt

$$V_9 = \operatorname{Ker}(C - 9E) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

□

Aufgabe 10 (5 Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x\mathrm{e}^{2-x}.$$

(a) Finden Sie alle lokalen Maximalstellen von f im offenen Intervall $(0, 4)$.

(b) Finden Sie alle globalen Minimalstellen von f im abgeschlossenen Intervall $[0, 4]$.

(c) Finden Sie alle Wendepunkte von f.

Lösung. (a) (Bepunktung: 3 Punkte) Wir berechnen und faktorisieren die ersten zwei Ableitungen von f:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{2-x} - x\mathrm{e}^{2-x} = (1-x)\mathrm{e}^{2-x},$$
$$f''(x) = -\mathrm{e}^{2-x} - (1-x)\mathrm{e}^{2-x} = (x-2)\mathrm{e}^{2-x}.$$

Die einzige Nullstelle von f' ist also $x = 1$. Es gilt $f''(1) = -\mathrm{e} < 0$. Dementsprechend ist

$$x = 1$$

die einzige lokale Maximalstelle von f im offenen Intervall $(0, 4)$.

(Bepunktung: 1 Punkt für f'. 1 Punkt für f''. 1 Punkt für die lokale Maximalstelle.)

(b) (Bepunktung: 1 Punkt) Wir müssen nun auch die Grenzen des Definitionsintervalls berücksichtigen, also 0 und 4. Wir berechnen

$$f(0) = 0,$$
$$f(4) = 4\mathrm{e}^{-2}.$$

Im Intervall $[0, 4]$ gibt es genau eine globale Minimalstelle, nämlich

$$x = 0.$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt.) Die zweite Ableitung f'' wechselt ihr Vorzeichen an der einzigen Wendestelle $x = 2$. Der einzige Wendepunkt von f ist also

$$(2, f(2)) = (2, 2).$$

(Bepunktung: Für den Punkt reicht die Angabe der Wendestelle $x = 2$.) □

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + xy^2 - 4x.$$

(a) Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(1, 0)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal-/Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt) Es gilt

$$f(1, 0) = 1^4 + 1 \cdot 0^2 - 4 \cdot 1 = -3.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkte (1 Punkt für den Gradienten und 1 für die Hesse-Matrix).) Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^2 - 4 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(c) (Bepunktung: 2 Punkt für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für die Aufstellung des Gleichungssystems und 0,5 Punkte für jeden kritischen Punkt, aber höchstens 1,5 Punkte.) Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist kritisch, falls $\nabla f(x, y) = 0$. Daher müssen wir das folgende System lösen:

$$\begin{aligned} 4x^3 + y^2 - 4 &= 0 \\ 2xy &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Jeweils in die erste Gleichung ersetzen führt zu den folgenden 3 kritischen Punkten:

$$(0, 2), \quad (0, -2), \quad (1, 0).$$

(d) (Bepunktung: 1 Punkt. (0,5 Punkte, falls mindestens ein kritischer Punkt korrekt diskutiert wird.) An den 3 kritischen Punkten ist die Hesse-Matrix von f jeweils gegeben durch

$$\mathrm{H}f(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daher sind sowohl $(0, 2)$ als auch $(0, -2)$ Sattelpunkte, weil die entsprechenden Hesse-Matrizen indefinit sind. Außerdem ist $(1, 0)$ eine lokale Minimalstelle, weil die entsprechende Hesse-Matrix positiv definit ist. $\square$

Aufgabe 12 (5 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 6y^2, \qquad g(x, y) = (x - 2)^2 + y^2 - 1.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f bzw. g.

(b) Finden Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte (1 Punkt pro Gradient).) Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x^2 + 6x + 12 \\ -12y \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 4 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

(b) (Bepunktung: 3 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für das Lagrange-System, noch 1 Punkte für mindestens einen kritischen Punkt, und noch 0,5 Punkte für mindestens einen korrekt diskutierten kritischen Punkt) Wir wenden das Lagrange-Multiplikatoren-verfahren an. Wir führen den Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ ein und betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -6x^2 + 6x + 12 &= \lambda(2x - 4), \\ -12y &= 2\lambda y, \\ (x - 2)^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $2y(\lambda + 6) = 0$, also müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $y = 0$ oder $\lambda = -6$. Im Fall $y = 0$ muss wegen der dritten Gleichung $x = 1$ oder $x = 3$ sein. Damit finden wir die Punkte $(1, 0)$ und $(3, 0)$. Im Fall $\lambda = -6$ bekommen aus der ersten Gleichung

$$-6x^2 + 6x + 12 = -12x + 24,$$

also

$$6(x^2 - 3x + 2) = 0.$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir $x = 1$ oder $x = 2$. Die Koordinate y erfüllt die dritte Gleichung $y^2 = 1 - (x - 2)^2$ und damit finden wir die Punkte $(1, 0)$ (den wir schon gefunden haben), $(2, 1), (2, -1)$. Insgesamt haben wir also 4 kritische Punkte von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$:

$$(1, 0), \quad (3, 0), \quad (2, 1), \quad (2, -1).$$

Wir berechnen

$$f(1, 0) = 13, \quad f(3, 0) = 9, \quad f(2, 1) = 14, \quad f(2, -1) = 14.$$

und folgern damit Folgendes:

- Die Punkte $(2, 1)$ und $(2, -1)$ sind globale Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.
- Der Punkt $(3, 0)$ ist eine globale Minimalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$. □

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Lösung folgender Differentialgleichung unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

$$y'' - 7y' + 10y = 0 \quad \text{mit } y(0) = 4 \text{ und } y'(0) = 11.$$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt) Das charakeristiche Polynom der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5).$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Die allgemeine (homogene) Lösung der Differentialgleichung ist also gegeben durch

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Nun bestimmen wir c_1, c_2 durch die Anfangsbedingungen. Zuerst berechnen wir

$$y'(x) = 2c_1 \mathrm{e}^{2x} + 5c_2 \mathrm{e}^{5x}.$$

(Bepunktung: 1 Punkt) Es muss gelten

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 4, \\ y'(0) &= 2c_1 + 5c_2 = 11. \end{aligned}$$

Also ist $c_1 = 3$ und $c_2 = 1$. Daher ist die gesuchte Lösung gegeben durch

$$y(x) = 3\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{5x}. \qquad \square$$