Modulprüfung (Module 41990 und 107730)

13. März 2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **10 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 4 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{6n^3+n^2}{3n^3+2n+1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 5\cdot(-1)^{2n}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \dfrac{2^n+n^2}{2^n+n^3}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{28n}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2)+2}{\sin(x^2)+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2)-1}{\sin(x^2)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \arctan(\sin(x))$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom positiven Parameter $a \in (0,+\infty)$ abhängige Funktion:

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\qquad x\mapsto\begin{cases}\dfrac{4x-a}{2x-1} & \text{für } x<0,\\ e^{-ax}+1 & \text{für } x\geq 0.\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

(c) Bestimmen Sie die Asymptote von f für $x\to+\infty$.

(d) Bestimmen Sie die Asymptote von f für $x\to-\infty$.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Der Tangens hyperbolicus tanh ist folgendermaßen definiert:

$$\tanh\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\tanh(\ln(2))$.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung des Tangens hyperbolicus.

(c) Besitzt der Tangens hyperbolicus kritische Punkte?

Aufgabe 5 (2 + 1 + 1 Punkte)**.** Eine Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K\colon\ (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 e^{3-x}.$$

(a) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion.

(b) Ermitteln Sie die Wachstsumsrate $WK(x)$ und die Elastizität $EK(x)$.

(c) An welchen Stellen sind die Kosten proportional elastisch, sprich $|EK(x)| = 1$?

Aufgabe 6 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion $r\colon\ D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+1}.$$

(a) Finden Sie den maximalen Definitionsbereich D von r.

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\, dx.$$

Aufgabe 7 (2 + 2 Punkte)**.** (a) Finden Sie eine rationale Funktion R mit

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int R(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^3 \ln(x^2)\,dx$.

Aufgabe 8 (2 + 1 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse der folgenden Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + xy^2 - 4x.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(b) Bestimmen Sie die drei kritischen Punkte von f.

(c) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal-/Maximalstelle oder Sattelpunkt).