Modulprüfung (Module 41990 und 107730) mit Lösungen

13. März 2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **10 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 4 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!
(Bepunktung: Folgefehler werden berücksichtigt. Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = 5 \cdot (-1)^{2n}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \dfrac{2^n + n^2}{2^n + n^3}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(1 + \dfrac{1}{4n}\right)^{28n}$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 1} = \frac{n^3\left(6 + \frac{1}{n}\right)}{n^3\left(3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{6 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{6+0}{3+0+0} = 2.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(-1)^{2n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1.$$

Also ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 5.$$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \frac{2^n + n^2}{2^n + n^3} = \frac{2^n\left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{n^3}{2^n}\right)} = \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{2^n}}.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0.$$

Dementsprechend haben wir

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

(d) Per Definition der eulerschen Zahl e gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{28n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^7 = e^7.$$

□

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)+2}{\sin(x^2)+1}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)-1}{\sin(x^2)}$

(c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6}$

(d) $\lim_{x\to 0} \arctan(\sin(x))$

Lösung. (Bepunktung: 1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Da exp und sin stetige Funktionen ist, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)+2}{\sin(x^2)+1} = \frac{\exp(0^2)+2}{\sin(0^2)+1} = \frac{1+2}{0+1} = 3.$$

(b) Es gilt $\lim_{x\to 0}(\exp(x^2)-1) = 0$ und $\lim_{x\to 0}\sin(x^2) = 0$. Daher können wir die Regel von de L'Hospital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)-1}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\exp(x^2)}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)}{\cos(x^2)} = \frac{\exp(0^2)}{\cos(0^2)} = 1.$$

(c) Für jedes $x \neq 2, 3$ gilt

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$$

und daher

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2}{x-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5.$$

Alternativ kann man die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-1}{2x-5} = \frac{2\cdot 3-1}{2\cdot 3-5} = 5.$$

(d) Da der Sinus und der Arcustangens stetige Funktionen sind, gilt

$$\lim_{x\to 0} \arctan(\sin(x)) = \arctan(\sin(0)) = \arctan(0) = 0.$$ □

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie folgende vom positiven Parameter $a \in (0, +\infty)$ abhängige Funktion:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{4x-a}{2x-1} & \text{für } x < 0, \\ e^{-ax}+1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(b) Bestimmen Sie a, sodass f stetig ist.

(c) Bestimmen Sie die Asymptote von f für $x \to +\infty$.

(d) Bestimmen Sie die Asymptote von f für $x \to -\infty$.

Lösung. (Bepunktung: Aufgrund eines Tippfehlers stand $\frac{4x+a}{2x-1}$ statt $\frac{4x-a}{2x-1}$ im Klausurtext. Das muss und wird in der Korrektur berücksichtigt werden.)

(a) (Bepunktung: 0,5 Punkte pro Grenzwert.) Es gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x-a}{2x-1} = \frac{4\cdot 0-a}{2\cdot 0-1} = a$$

und

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{-ax}+1\right) = e^{-a\cdot 0}+1 = 2.$$

(b) (Bepunktung: 1 Punkt.) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn die zwei Grenzwerte übereinstimmen, also wenn $a = 2$.

(c) (Bepunktung: 1 Punkt.) Wegen $a > 0$ gilt

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(e^{-ax}+1\right) = 1$$

also besitzt f die horizontale Asymptote $y = 1$ für $x \to +\infty$.

(d) (Bepunktung: 1 Punkt.) Es gilt

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x-a}{2x-1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{4-\frac{a}{x}}{2-\frac{1}{x}} = 2,$$

also besitzt f die horizontale Asymptote $y = 2$ für $x \to -\infty$. $\square$

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Der Tangens hyperbolicus tanh ist folgendermaßen definiert:

$$\tanh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\tanh(\ln(2))$.

(b) Berechnen Sie die erste Ableitung des Tangens hyperbolicus.

(c) Besitzt der Tangens hyperbolicus kritische Punkte?

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt.) Es gilt

$$e^{2\ln(2)} = e^{\ln(2^2)} = e^{\ln(4)} = 4$$

und damit

$$\tanh(\ln(2)) = 1 - \frac{2}{4+1} = \frac{3}{5}.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für jeden sinnvollen Schritt (bis 1,5 Punkte)) Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\tanh'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt) Ein kritischer Punkt einer Funktion f ist ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Wegen $e^{2x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist stets $\tanh'(x) \neq 0$: Der Tangens hyperbolicus besitzt keine kritischen Punkte. □

Aufgabe 5 (2 + 1 + 1 Punkte)**.** Eine Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 e^{3-x}.$$

(a) Bestimmen Sie die Grenzkostenfunktion.

(b) Ermitteln Sie die Wachstsumsrate $WK(x)$ und die Elastizität $EK(x)$.

(c) An welchen Stellen sind die Kosten proportional elastisch, sprich $|EK(x)| = 1$?

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkt für die Definition von ‘Grenzkostenfunktion’ = ‘Ableitung der Kostenfunktion’ und für jeden sinnvollen Schritt (bis 1,5 Punkte).) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion:

$$K'(t) = 3x^2 e^{3-x} - x^3 e^{3-x} = x^2(3-x)e^{3-x}.$$

(b) (Bepunktung: 1 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt.) Die Wachstumsrate WK ist per Definition gegeben durch

$$WK(x) = \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{x^2(3-x)e^{3-x}}{x^3 e^{3-x}} = \frac{3-x}{x}.$$

Die Elastizität EK ist per Definition gegeben durch

$$EK(x) = WK(x) \cdot x = 3 - x.$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt.) Wir müssen alle $x \in (0, +\infty)$ mit $|3 - x| = 1$ finden.

(a) Ist $x > 3$ dann ist $|3 - x| = x - 3$ und $x - 3 = 1$ ergibt $x = 4$.

(b) Ist $x < 3$ dann ist $|3 - x| = 3 - x$ und $3 - x = 1$ ergibt $x = 2$.

Die Kosten sind also proportional elastisch an den Stellen $x = 2$ und $x = 4$. □

Aufgabe 6 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die rationale Funktion $r\colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+1}.$$

(a) Finden Sie den maximalen Definitionsbereich D von r.

(b) Finden Sie die reelle Partialbruchzerlegung von r mit $A, B \in \mathbb{R}$:

$$r(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}.$$

(c) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int r(x)\,dx.$$

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt) Es gilt $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Die Funktion r ist daher auf $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ wohl definiert.

(b) (Bepunktung: 2 Punkte, davon 1 Punkt für die Idee, Koeffizienten zu vergleichen) Es gilt

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A = 2$ und $A + B = 1$, also $A = 2$ und $B = -1$:

$$r(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt) Wir haben

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = 2\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}.$$

□

Aufgabe 7 (2 + 2 Punkte). (a) Finden Sie eine rationale Funktion R mit

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int R(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int x^3 \ln(x^2)\,dx$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für 'partielle Integration', 0,5 Punkte für $u(x) = \frac{1}{4}x^4$ und noch 0,5 Punkte für $v(x) = \ln(x^2)$) Partielle Integration $\int u'v = uv - \int uv'$ mit $u(x) = \frac{1}{4}x^4$ und $v(x) = \ln(x^2)$ liefert

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^3\,dx.$$

(Bepunktung: 0,5 Punkte, falls die Antwort eine rationale Funktion ist) Daher ist die Antwort

$$R(x) = \frac{1}{2}x^3.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für jeden sinnvollen Schritt (bis maximal 1,5 Punkte).) Aus (a) erhalten wir

$$\int x^3 \ln(x^2)\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \int \frac{1}{2}x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(x^2) - \frac{1}{8}x^4 + C.$$

(Bepunktung: Kein Punktabzug, falls "+C" fehlt.)

□

Aufgabe 8 (2 + 1 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Lösung. (a) (Bepunktung: 2 Punkte für das korrekte Ergebnis. Sonst 0,5 Punkte für jeden sinnvollen Schritt (bis maximal 1,5 Punkte).) Wir wenden die Definition von $\det(A)$ an:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 0 \cdot 0 + a^2 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot (-a) - 1 \cdot (-a) \cdot 1 - a^2 \cdot a \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= a. \end{aligned}$$

(b) (Bepunktung: 1 Punkt.) Der Rang von A ist gleich 3 genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, also für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) (Bepunktung: 1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für das korrekte Einsetzen von $a = 0$.) Wir setzen $a = 0$ ein und bekommen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist in Zeilenstufenform und hat 2 Pivots, also ist ihr Rang gleich 2. □

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Finden Sie die Inverse der folgenden Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir fangen mit der erweiterten Matrix $(B|I)$ an, wobei I die Identitätsmatrix bezeichnet:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es sei $\mathbf{z}_i$ die i-te Zeile. Wir tauschen $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nun tauschen wir $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren $\mathbf{z}_2$ mit -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_2$ mit $\mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir ersetzen $\mathbf{z}_1$ mit $\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Inverse von B ist also gegeben durch

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Bepunktung: 4 Punkte für ein korrektes Endergebnis. Sonst

- Mindestens 2 Punkte, falls eine Spalte von B^{-1} korrekt ausgerechnet wurde.
- Bis zu 3 Punkte für sinnvolle Schritte.
- 1 Punkt, falls $\det(B) = -1$ korrekt ausgerechnet wurde.

) $\square$

Aufgabe 10 (1 + 2 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + xy^2 - 4x.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(b) Bestimmen Sie die drei kritischen Punkte von f.

(c) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal-/Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Lösung. (a) (Bepunktung: 1 Punkt (0,5 Punkte für den Gradienten und 0,5 Punkte für die Hesse-Matrix).) Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^2 - 4 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

(b) (Bepunktung: 2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für die Aufstellung des Gleichungssystems und 0,5 Punkte für jeden kritischen Punkt, aber höchstens 1,5 Punkte.) Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist kritisch, falls $\nabla f(x, y) = 0$. Daher müssen wir das folgende System lösen:

$$\begin{aligned} 4x^3 + y^2 - 4 &= 0 \\ 2xy &= 0 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Jeweils in die erste Gleichung ersetzen führt zu den folgenden 3 kritischen Punkten:

$$(0, 2), \quad (0, -2), \quad (1, 0).$$

(c) (Bepunktung: 1 Punkt. (0,5 Punkte, falls mindestens ein kritischer Punkt korrekt diskutiert wird.) An den 3 kritischen Punkten ist die Hesse-Matrix von f jeweils gegeben durch

$$\mathrm{H}f(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}f(0, -2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{H}f(1, 0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Daher sind sowohl $(0, 2)$ als auch $(0, -2)$ Sattelpunkte, weil die entsprechenden Hesse-Matrizen indefinit sind. Außerdem ist $(1, 0)$ eine lokale Minimalstelle, weil die entsprechende Hesse-Matrix positiv definit ist. □