# Modulprüfung (Module 41990 und 107730)

07.08.2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **10 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 4 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

**Viel Erfolg!**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n!}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(2 + \dfrac{1}{2n}\right)^4$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^3) + 3}{x^3 + 2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^3) - 1}{x^3}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x))$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{|x|}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -1$ bzw. $x = 2$ als rationale Zahl $p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert der Funktion $g$ in 0.

(c) Ist die Funktion $g$ stetig fortsetzbar in $x = 0$?

(d) Finden Sie die Asymptote von $g$ für $x \to +\infty$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Der Sekans hyperbolicus sech ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{sech}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\operatorname{sech}(\ln(2))$ als rationale Zahl $p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Sekans hyperbolicus.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung $\operatorname{sech}'$ des Sekans hyperbolicus.

(d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sekans hyperbolicus.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Bezeichne $p$ den Preis einer beliebig teilbaren Ware. Eine Nachfragefunktion sei gegeben durch

$$x = N(p) = \frac{6-p}{p+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich von $N$.

(b) Ermitteln Sie die Grenznachfragefunktion.

(c) Ermitteln Sie die Preiselastizität der Nachfrage $EN(p)$.

(d) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion $p = P(x)$, wobei $P = N^{-1}$.

**Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(x^3 + \sin(3x)\big)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx$

**Aufgabe 7** (4 Punkte)**.** (a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral durch die Substitution $y = 1 + x^2$:

$$\int \frac{4x}{(1+x^2)^3}\, dx$$

(b) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^3}\, dx$$

**Aufgabe 8** (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix $A$, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix $A$ symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von $A$.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix $A$ vollen Rang hat.

(d) Bestimmen Sie den Rang von $A$ für $a = 1$.

**Aufgabe 9** (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

**Aufgabe 10** (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x + 2)^2 - y^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von $f$ unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$