Modulprüfung (Module 41990 und 107730) mit Lösungen

07.08.2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **10 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 4 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.

)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n!}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(2 + \dfrac{1}{2n}\right)^4$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1} = \frac{n^7\left(8 - \frac{1}{n^4}\right)}{n^7\left(2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^7}\right)} = \frac{8 - \frac{1}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^7}}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{2} = 4.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)} = \frac{n^2\left(4 + \frac{\sin(n)}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{\sin(n)}{n^2}\right)} = \frac{4 + \frac{\sin(n)}{n^2}}{2 + \frac{\sin(n)}{n^2}}.$$

Wegen des Sandwichsatzes gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{2} = 2.$$

(c) Für $n = 1$ gilt zwar $c_1 = (-1)^{1!} = -1$, aber für jedes $n \geq 2$ ist $n! = n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ eine gerade Zahl, also gilt $c_n = 1$. Deswegen gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} d_n = (2+0)^4 = 16.$$

□

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)+3}{x^3+2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x))$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Da der Cosinus und die Funktion $x \mapsto x^3$ stetige Funktionen ist, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)+2}{x^3+2} = \frac{\cos(0^3)+3}{0^3+2} = \frac{4}{2} = 2.$$

(b) Es gilt $\lim_{x\to 0}(\cos(x^3)-1) = 0$ und $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$. Daher können wir die Regel von de L'Hospital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2\sin(x^3)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\sin(x^3) = -\sin(0^3) = 0.$$

(c) Man kann die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+4}{2x} = \frac{2\cdot 1+4}{2\cdot 1} = 3.$$

(d) Es gilt $\lim_{x\to -\infty} \arctan(x) = -\pi/2$. Daher haben wir

$$\lim_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x)) = \sin(-\pi/2) = -1.$$

□

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{|x|}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -1$ bzw. $x = 2$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert der Funktion g in 0.

(c) Ist die Funktion g stetig fortsetzbar in $x = 0$?

(d) Finden Sie die Asymptote von g für $x \to +\infty$.

Lösung. (a) (0,5 Punkte pro Wert.) Wir berechnen

$$\begin{aligned} g(-1) &= \frac{1}{(-1)^2+1} + \frac{-1}{|-1|} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \\ g(2) &= \frac{1}{2^2+1} + \frac{2}{|2|} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

(b) (0,5 Punkte pro Grenzwert.) Wir können Folgendes schreiben:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} - 1 & \text{für } x < 0, \\ \dfrac{1}{x^2+1} + 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1}{0^2+1} - 1 = 0, \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+1} + 1 = \frac{1}{0^2+1} + 1 = 2. \end{aligned}$$

(c) (1 Punkt.) Nein, die Funktion g ist nicht stetig fortsetzbar in 0, denn die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte von g in 0 nicht übereinstimmen.

(d) (1 Punkt.) Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1} + 1 = 1,$$

also besitzt g die Asymptote $y = 1$ für $x \to +\infty$. □

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Der Sekans hyperbolicus sech ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{sech}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\operatorname{sech}(\ln(2))$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Sekans hyperbolicus.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung sech' des Sekans hyperbolicus.

(d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sekans hyperbolicus.

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir haben

$$\operatorname{sech}(\ln(2)) = \frac{2}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}.$$

(b) (1 Punkt) Der Sekans hyperbolicus besitzt keine Nullstellen.

(c) (1 Punkt) Wegen der Quotientenregel gilt

$$\operatorname{sech}'(x) = -\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

(d) (1 Punkt) Ein kritischer Punkt einer Funktion f ist ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Es gilt $\operatorname{sech}'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$e^x = e^{-x},$$

also genau dann, wenn $x = -x$, sprich $x = 0$. □

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Bezeichne p den Preis einer beliebig teilbaren Ware. Eine Nachfragefunktion sei gegeben durch

$$x = N(p) = \frac{6-p}{p+2}.$$

(a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich von N.

(b) Ermitteln Sie die Grenznachfragefunktion.

(c) Ermitteln Sie die Preiselastizität der Nachfrage $EN(p)$.

(d) Ermitteln Sie die Preis-Absatz-Funktion $p = P(x)$, wobei $P = N^{-1}$.

Lösung. (a) (1 Punkt) Preis und Nachfrage sind immer als positiv anzunehmen. Daher muss gelten $p > 0$ und $N(p) > 0$, also $6 - p > 0$, was $p < 6$ bedeutet. Der sachliche Definitionsbereich von N ist also das Intervall $(0, 6)$.

(b) (1 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für die richtige Definition von 'Grenznachfragefunktion') Die Grenznachfragefunktion ist die Ableitung N' der Nachfragefunktion N. Es gilt

$$N'(p) = \frac{-(p+2)-(6-p)}{(p+2)^2} = -\frac{8}{(p+2)^2}.$$

(c) (1 Punkt für die volle Antwort. Sonst 0,5 Punkte für die richtige Definition von 'Preiselastizität der Nachfrage') Die Preislastizität der Nachfrage ist per Definition die Elastizität der Nachfragefunktion:

$$EN(p) = \frac{N'(p)}{N(p)} \cdot p = -\frac{8p}{(p+2)(6-p)}.$$

(d) (1 Punkt) Wir lösen die Gleichung $x = (6-p)/(p+2)$ nach p. Zuerst multiplizieren wir beide Seiten mit $p + 2$ und erhalten

$$xp + 2x = 6 - p, \quad \text{sprich} \quad xp + p = 6 - 2x.$$

Daraus folgt

$$p = P(x) = \frac{6-2x}{x+1}.$$ □

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(x^3 + \sin(3x)\right) dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx$

Lösung. (a) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral:

$$\int \left(x^3 + \sin(3x)\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_0^{\pi} \left(x^3+\sin(3x)\right) dx = \left(\frac{1}{4}\pi^4 - \frac{1}{3}\cos(3\pi)\right) - \left(\frac{1}{4}(-\pi)^4 - \frac{1}{3}\cos(-3\pi)\right) = 0.$$

Alternativ können wir bemerken, dass $x \longmapsto x^3 + \sin(3x)$ eine ungerade Funktion ist, also gilt

$$\int_{-a}^{a} \left(x^3 + \sin(3x)\right) dx = 0.$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(b) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral. Wir bemerken, dass der Integrand eine rationale Funktion ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{2x}{x+3} = \frac{2(x+3)-6}{x+3} = 2 - \frac{6}{x+3}.$$

Daher haben wir

$$\int \frac{2x}{x+3}\, dx = \int \left(2 - \frac{6}{x+3}\right) dx = 2x - 6\ln(x+3) + C.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx = \left(2\cdot 0 - 6\ln(0+3)\right) - \left(2\cdot(-2) - 6\ln(-2+3)\right) = 4 - 6\ln(3).$$

□

Aufgabe 7 (4 Punkte). (a) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral durch die Substitution $y = 1 + x^2$:

$$\int \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx$$

(b) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx$$

Lösung. (Kein Punktabzug, falls "$+C$" fehlt.)

(a) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Durch die Substitution $y = 1 + x^2$ erhalten wir die Kurzform $dy = 2x\,dx$ und damit

$$\int \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx = \int \frac{2}{y^3}\,dy = -\frac{1}{y^2} + C = -\frac{1}{(1+x^2)^2} + C.$$

(b) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Wegen Teil (a) gilt für jedes $b > 0$

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx \left[-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right]_1^b \\ &= -\frac{1}{(1+b^2)^2} + \frac{1}{(1+1^2)^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+b^2)^2}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{4x}{(1+x^2)^3}\,dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+b^2)^2}\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 1$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Damit die Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch ist, muss $a_{23} = a_{32}$ gelten, also $a = 0$. Tatsächlich ist die Matrix A symmetrisch für $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt für das korrekte Ergebnis. Sonst 0,5 Punkt für eine korrekte Anwendung der Definition von Determinante.) Mit der Formel für die Determinante von $(3, 3)$-Matrizen erhalten wir

$$\det(A) = a \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - a \cdot a \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot a \cdot 0 = a^2 - 1.$$

(c) (1 Punkt.) Die Matrix A hat genau dann vollen Rang 3, wenn $\det(A) = a^2 - 1 \neq 0$, sprich für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(d) (1 Punkt.) Wir setzen $a = 1$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 0$ wissen wir, dass $\operatorname{rang}(A) < 3$. Die zweite und dritte Spalte sind linear unabhängig, also ist $\operatorname{rang}(A) = 2$. □

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Koeffizientenmatrix und der Vektor $\mathbf{b}$ sind folgendermaßen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) (3 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 für jeden sinnvollen Schritt (bis 2,5 Punkte). Pivots müssen nicht hervorgehoben werden.) Wir schreiben die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen sie anschließend in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \mathbf{z}_3 - 2\mathbf{z}_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{5}\mathbf{z}_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mathbf{z}_2 - 3\mathbf{z}_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Aus der reduzierten Zeilenstufenform lesen wir Folgendes ab: Die Koordinaten x_1, x_3, x_4 sind Basiskoordinaten, die Koordinate x_2 ist frei. Deshalb schreiben wir $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$x_4 = 2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_1 = 1 + t.$$

Also besteht die Lösungsmenge aus allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x+2)^2 - y^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Lösung. (1 Punkt) Wir berechnen die Gradienten von f und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+4 \\ -2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

(1 Punkt) Wir stellen die Lagrange-Bedingung auf:

$$\begin{cases} 2x + 4 = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt $2y(\lambda + 1) = 0$, also müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $y = 0$ oder $\lambda = -1$.

(1 Punkt) Der Fall $y = 0$ liefert die zwei Punkte $(1,0)$ und $(-1,0)$.

Aus $\lambda = -1$ folgt $x = -1$ wegen der 1. Gleichung. Damit finden wir den Punkt $(1,0)$, den wir schon gefunden haben.

(1 Punkt) Wir berechnen

$$f(1,0) = 8, \quad f(-1,0) = 0.$$

Damit ist $(-1,0)$ die einzige globale Minimalstelle und $(1,0)$ die einzige globale Maximalstelle, denn die Bedingung $g(x,y) = 0$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also eine beschränkte Teilmenge. $\square$