Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP) mit Lösungen

07.08.2024

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.

)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n!}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(2 + \dfrac{1}{2n}\right)^4$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{8n^7 - n^3}{2n^7 + n^5 + 1} = \frac{n^7\left(8 - \frac{1}{n^4}\right)}{n^7\left(2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^7}\right)} = \frac{8 - \frac{1}{n^4}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^7}}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{8}{2} = 4.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{4n^2 + \sin(n)}{2n^2 + \sin(n)} = \frac{n^2\left(4 + \frac{\sin(n)}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{\sin(n)}{n^2}\right)} = \frac{4 + \frac{\sin(n)}{n^2}}{2 + \frac{\sin(n)}{n^2}}.$$

Wegen des Sandwichsatzes gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = 0$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{4}{2} = 2.$$

(c) Für $n = 1$ gilt $c_1 = (-1)^{1!} = -1$, aber für jedes $n \geq 2$ ist $n! = n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ eine gerade Zahl, also gilt $c_n = 1$. Deswegen gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

(d) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} (2+0)^4 = 16. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$

Lösung. (a) (1 Punkt) Die harmonische Reihe divergiert.

(b) (1 Punkt) Wir erkennen eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

(c) (2 Punkte) Wir erkennen eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} - 1 = 8.$$

(d) (2 Punkte) Nach der Substitution $m = n + 1$ erkennen wir eine Exponentialreihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = e - 2. \qquad \square$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^3)+3}{x^3+2}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^3)-1}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x))$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Da der Cosinus und die Funktion $x \mapsto x^3$ stetige Funktionen ist, gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)+2}{x^3+2} = \frac{\cos(0^3)+3}{0^3+2} = \frac{4}{2} = 2.$$

(b) Es gilt $\lim_{x\to 0}(\cos(x^3)-1) = 0$ und $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$. Daher können wir die Regel von de L'Hospital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^3)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2\sin(x^3)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} -\sin(x^3) = -\sin(0^3) = 0.$$

(c) Man kann die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+4}{2x} = \frac{2\cdot 1+4}{2\cdot 1} = 3.$$

(d) Es gilt $\lim_{x\to -\infty} \arctan(x) = -\pi/2$. Daher haben wir

$$\lim_{x\to -\infty} \sin(\arctan(x)) = \sin(-\pi/2) = -1.$$

□

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{|x|}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -1$ bzw. $x = 2$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von g in 0.

(c) Ist die Funktion g stetig fortsetzbar in $x = 0$?

(d) Finden Sie die Asymptote von g für $x \to +\infty$.

Lösung. (a) (0,5 Punkte pro Wert.) Wir berechnen

$$g(-1) = \frac{1}{(-1)^2+1} + \frac{-1}{|-1|} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$
$$g(2) = \frac{1}{2^2+1} + \frac{2}{|2|} = \frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}.$$

(b) (0,5 Punkte pro Grenzwert.) Wir können Folgendes schreiben:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} - 1 & \text{für } x < 0, \\ \dfrac{1}{x^2+1} + 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1}{0^2+1} - 1 = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2+1} + 1 = \frac{1}{0^2+1} + 1 = 2.$$

(c) (1 Punkt.) Nein, die Funktion g ist nicht stetig fortsetzbar in 0, denn die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte von g in 0 nicht übereinstimmen.

(d) (1 Punkt.) Es gilt

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+1} + 1 = 1,$$

also besitzt g die Asymptote $y = 1$ für $x \to +\infty$. □

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Der Sekans hyperbolicus $\operatorname{sech}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\operatorname{sech}(\ln(2))$ als rationale Zahl p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Sekans hyperbolicus.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung sech' des Sekans hyperbolicus.

(d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sekans hyperbolicus.

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir haben

$$\operatorname{sech}(\ln(2)) = \frac{2}{e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}} = \frac{2}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}.$$

(b) (1 Punkt) Der Sekans hyperbolicus besitzt keine Nullstellen.

(c) (1 Punkt) Wegen der Quotientenregel gilt

$$\operatorname{sech}'(x) = -\frac{2(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

(d) (1 Punkt) Ein kritischer Punkt einer Funktion f ist ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Es gilt $\operatorname{sech}'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$e^x = e^{-x},$$

also genau dann, wenn $x = -x$, sprich $x = 0$. □

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = ax + \cos(bx).$$

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = 1 + x - 2x^2.$$

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$f'(x) = a - b\sin(bx),$$
$$f''(x) = -b^2\cos(bx).$$

(b) (2 Punkte) Wir haben

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = a, \quad f''(0) = -b^2.$$

Dementsprechend ist das zweite Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T_2(x) = 1 + ax - \frac{b^2}{2}x^2.$$

(c) (1 Punkt) Damit $T_2(x) = 1 + x - 2x^2$ muss $a = 1$, $b^2 = 4$ gelten, sprich

$$(a, b) = (1, 2) \quad \text{oder} \quad (a, b) = (1, -2).$$ □

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(x^3 + \sin(3x)\big)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx$

Lösung. (a) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral:

$$\int \big(x^3 + \sin(3x)\big)\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_0^{\pi} \big(x^3+\sin(3x)\big)\, dx = \Big(\frac{1}{4}\pi^4-\frac{1}{3}\cos(3\pi)\Big)-\Big(\frac{1}{4}(-\pi)^4-\frac{1}{3}\cos(-3\pi)\Big) = 0.$$

Alternativ können wir bemerken, dass $x \longmapsto x^3 + \sin(3x)$ eine ungerade Funktion ist, also gilt

$$\int_{-a}^{a} \big(x^3 + \sin(3x)\big)\, dx = 0.$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(b) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral. Wir bemerken, dass der Integrand eine rationale Funktion ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{2x}{x+3} = \frac{2(x+3)-6}{x+3} = 2 - \frac{6}{x+3}.$$

Daher haben wir

$$\int \frac{2x}{x+3}\, dx = \int \Big(2 - \frac{6}{x+3}\Big)\, dx = 2x - 6\ln(x+3) + C.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_{-2}^{0} \frac{2x}{x+3}\, dx = \Big(2\cdot 0-6\ln(0+3)\Big)-\Big(2\cdot(-2)-6\ln(-2+3)\Big) = 4-6\ln(3).$$

□

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 1$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Damit die Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch ist, muss $a_{23} = a_{32}$ gelten, also $a = 0$. Tatsächlich ist die Matrix A symmetrisch für $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt für das korrekte Ergebnis. Sonst 0,5 Punkt für eine korrekte Anwendung der Definition von Determinante.) Mit der Formel für die Determinante von $(3, 3)$-Matrizen erhalten wir

$$\det(A) = a \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0 - a \cdot a \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot a \cdot 0 = a^2 - 1.$$

(c) (1 Punkt.) Die Matrix A hat genau dann vollen Rang 3, wenn $\det(A) = a^2 - 1 \neq 0$, sprich für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(d) (1 Punkt.) Wir setzen $a = 1$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 0$ wissen wir, dass $\operatorname{rang}(A) < 3$. Die zweite und dritte Spalte sind linear unabhängig, also ist $\operatorname{rang}(A) = 2$. □

Aufgabe 9 (6 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu jedem reellen Eigenwert λ der Matrix C.

Lösung. (a) (3 Punkte) Wir berechnen das charakteristische Polynom von C:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2.$$

Die Eigenwerte von C sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

(b) (3 Punkte) Zuerst berechnen wir den Eigenraum V_λ zu $\lambda = 1$. Dafür betrachten wir die Matrix $C - E$), wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet:

$$C - E = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\intercal$ mit $x_1 = -x_3$ und $x_2 = 0$. Also gilt

$$V_1 = \operatorname{kern}(C - E) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Nun berechnen wir den Eigenraum V_λ zu $\lambda = 2$. Dafür betrachten wir

$$C - 2E = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^\intercal$ mit $2x_2 + x_3 = 0$ und $-x_2 - x_3 = 0$, sprich $x_2 = x_3 = 0$. Also gilt

$$V_2 = \operatorname{kern}(C - 2E) = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}). \qquad \square$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Koeffizientenmatrix und der Vektor $\mathbf{b}$ sind folgendermaßen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(b) (3 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 für jeden sinnvollen Schritt (bis 2,5 Punkte). Pivots müssen nicht hervorgehoben werden.) Wir schreiben die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen sie anschließend in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathbf{z}_3 - 2\mathbf{z}_2 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{5}\mathbf{z}_3 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathbf{z}_2 - 3\mathbf{z}_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Aus der reduzierten Zeilenstufenform lesen wir Folgendes ab: Die Koordinaten x_1, x_3, x_4 sind Basiskoordinaten, die Koordinate x_2 ist frei. Deshalb schreiben wir $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$x_4 = 2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_1 = 1 + t.$$

Also besteht die Lösungsmenge aus allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = y^4 + 2x^2y - 32y.$$

(a) Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(0,1)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal- bzw. Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$f(0,1) = 1^4 + 2 \cdot 0^2 \cdot 1 - 32 \cdot 1 = -31.$$

(b) (2 Punkte) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4xy \\ 4y^3 + 2x^2 - 32 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x \\ 4x & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

(c) (2 Punkte) Ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ heißt kritisch, falls $\nabla f(x,y) = 0$. Daher müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 4xy &= 0, \\ 4y^3 + 2x^2 - 32 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Setzen wir $x = 0$ in die zweite Gleichung ein, so finden wir $4y^3 = 32$, also $y = 2$. Setzen wir $y = 0$ in die zweite Gleichung ein, so finden wir $2x^2 = 32$, also $x = 4$ oder $x = -4$. Insgesamt finden wir also 3 kritische Punkte:

$$(0,2), \quad (4,0), \quad (-4,0).$$

(d) (1 Punkt) An den drei kritischen Punkten ist die Hesse-Matrix von f jeweils gegeben durch

$$\begin{aligned} Hf(0,2) &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 48 \end{pmatrix}, \\ Hf(4,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \\ Hf(-4,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher sind sowohl $(4,0)$ als auch $(-4,0)$ Sattelpunkte, weil die entsprechenden Hesse-Matrizen indefinit sind. Außerdem ist $(0,2)$ eine lokale Minimalstelle, weil die entsprechende Hesse-Matrix positiv definit ist. □

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x + 2)^2 - y^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Lösung. (1 Punkt) Wir berechnen die Gradienten von f und $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 4 \\ -2y \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

(1 Punkt) Wir stellen die Lagrange-Bedingung auf:

$$\begin{cases} 2x + 4 = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Aus der zweiten Bedingung folgt $2y(\lambda + 1) = 0$, also müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $y = 0$ oder $\lambda = -1$.

(1 Punkt) Der Fall $y = 0$ liefert die zwei Punkte $(1, 0)$ und $(-1, 0)$.

Aus $\lambda = -1$ folgt $x = -1$ aus der 1. Gleichung. Damit finden wir den Punkt $(1, 0)$, den wir schon gefunden haben.

(1 Punkt) Wir berechnen

$$f(1, 0) = 8, \quad f(-1, 0) = 0.$$

Damit ist $(-1, 0)$ die einzige globale Minimalstelle und $(1, 1)$ die einzige globale Maximalstelle, denn die Bedingung $g(x, y) = 0$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1, also eine beschränkte Teilmenge. □

Aufgabe 13 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 4y = 8.$$

(a) Schreiben Sie das entsprechende charakteristische Polynom P auf und finden Sie alle Nullstellen von P mit jeweiliger Vielfachheit.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(c) Finden Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2, y'(0) = 1$.

Lösung. (a) (2 Punkte) Das charakteristische Polynom P ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Die einzige Nullstelle ist $\lambda_1 = 2$ mit Vielfachheit 2.

(b) (1 Punkt) Die Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung können aus P abgelesen werden:

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) (2 Punkte) Wir suchen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen führt sofort zu $c = 2$, also

$$y_p(x) = 2.$$

(d) (1 Punkt) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = 2 + c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die erste Ableitung:

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} + 2c_2 x e^{2x}.$$

Wir setzen die angegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 2 + c_1 &= 2 \\ 2c_1 + c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$. Dementsprechend ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = 2 + x e^{2x}.$$ □