Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 13** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 14.10.2024 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom 22.10.2024 bis 24.10.2024 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik
$\mathcal{Q}_1 = \{x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,:\, -4x_1x_2 + 14 = 0\}$.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik
$\mathcal{Q}_2 = \left\{(x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2 \,:\, 4x_1^2 + x_2 - 3x_1 + \frac{25}{16} = 0\right\}$.

Aufgabe 2 (*2 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{\ln(k^2)}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}}$

Aufgabe 3 (*3 Punkte*) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 3^n + n^3 2^n}$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Gegeben sei die reelle Zahl $r \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie induktiv:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln(rk) = \ln\left(n! \cdot r^n\right)$$

Aufgabe 5 (*4 Punkte*) Zum Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi_\gamma \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \colon v \mapsto \begin{pmatrix} \gamma \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times v$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A := {}_E\left(\varphi_\gamma\right)_E$ von φ_γ bezüglich der Standardbasis E.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}\left(\varphi_\gamma\right)$.

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^4 - 4y + 8\,,$$
$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \colon \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto x^4 + \frac{1}{4}y^4 - y^3\,.$$

Wir suchen die relativen Extrema von f auf der kompakten Menge $D := \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = 0\right\}$.

(a) Bestimmen Sie die $\nabla f\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$ und $\nabla g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right)$.

(b) Stellen Sie das Lagrange-System zu $f|_D$ auf.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von $f|_D$, also die Lösungen des in (b) aufgestellten Systems. Geben Sie jeweils die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren an.

(d) Bestimmen Sie den minimalen sowie den maximalen Wert von f auf D.

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Berechnen Sie das folgende Integral: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^{(x^2+4)}}\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Gegeben sei das konservative Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x)y + 1 \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

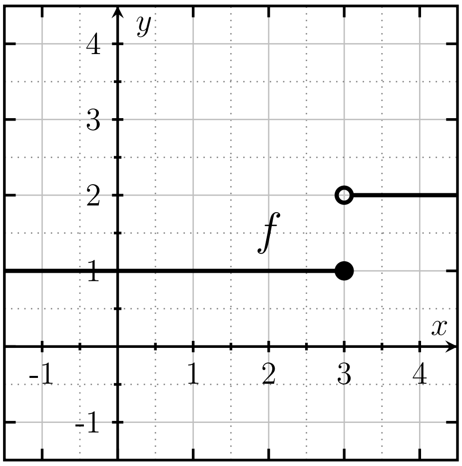
(a) Berechnen Sie eine Potentialfunktion.

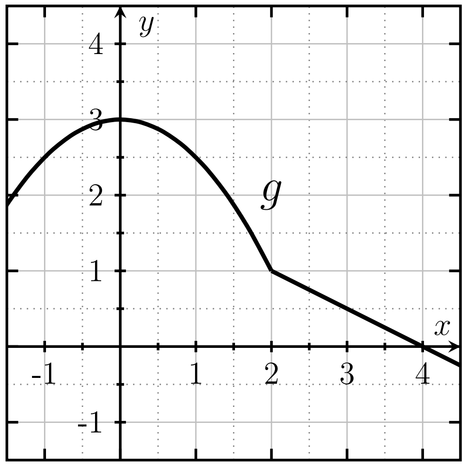
(b) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f\left(\binom{x}{y}\right)$.

Name, Vorname:		**Matrikel-Nummer:**		**Studien-gang:**	

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) In den nachfolgenden Abbildungen sind Ausschnitte der Graphen

der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 1 & x \leqq 3 \\ 2 & x > 3 \end{cases}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3 & x \leqq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2 & x > 2 \end{cases}$ dargestellt:





Geben Sie die Stellen an, an denen die Funktionen nicht stetig bzw. nicht differenzierbar sind. Gibt es keine solche Stellen, so notieren Sie „leere Menge“.

	ist unstetig bei	ist nicht differenzierbar bei
f		
g		

Aufgabe 10 (*3 Punkte*) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Gegeben seien die Matrizen A_α, $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -3 & 2\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie α so, dass $\det(A_\alpha) = 8$ gilt: $\alpha =$ ☐

(b) Bestimmen Sie $\det(B)$: $\det(B) =$ ☐

(c) Bestimmen Sie $\det(B^{-1}A_\alpha)$ für das in (a) bestimmte α: $\det\left(B^{-1}A_\alpha\right) =$ ☐

Aufgabe 11 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto (\mathrm{e}^x + 1)^4$.

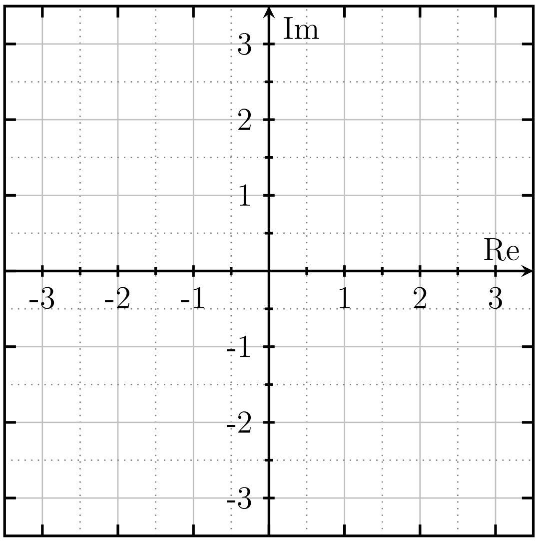
(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$f'(x) =$ $\boxed{}$ $f''(x) =$ $\boxed{}$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

$T_2(f, x, 0) =$ $\boxed{}$

Aufgabe 12 (*4 Punkte*) Sei M die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 2 \leqq 2\,\mathrm{Im}(z) \leqq \mathrm{Re}(z) + \frac{7}{2} \text{ und } \mathrm{Re}(z) \leqq \frac{1}{2} \right\}$ und f die Abbildung $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \bar{z} + \mathrm{i}$. Skizzieren Sie M sowie das Bild $f(M)$ in der Gaußschen Zahlenebene:



Aufgabe 13 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Zeilenrang hat $A - 2E_4$? $\boxed{}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, deren algebraische und geometrische Vielfachheit und geben Sie die zugehörigen Eigenräume an.

$\boxed{}$
