

Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für Ingenieurstudiengänge

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 7** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 8 – 11** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

| | | | | | | |
|---------------------|--------------|---------------|------------|-------------------------|------------|----------------------------|
| $f(x)$ | x^a | e^x | $\sin(x)$ | $\tan(x)$ | $\sinh(x)$ | $\operatorname{arsinh}(x)$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $a x^{a-1}$ | e^x | $\cos(x)$ | $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ | $\cosh(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ |
| $f(x)$ | b^x | $\ln x $ | $\cos(x)$ | $\arctan(x)$ | $\cosh(x)$ | $\operatorname{arcosh}(x)$ |
| $\frac{d}{dx} f(x)$ | $\ln(b) b^x$ | $\frac{1}{x}$ | $-\sin(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\sinh(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ |

| | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| x | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| 0 | 0 | 1 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 |

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}^+$$

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 07.04.2025 über das C@MPUS-Portal (<https://campus.uni-stuttgart.de/>) bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom 14.04.2025 bis 16.04.2025 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (7 Punkte) Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1 - 4 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie eine euklidische Normalform von Q .

Aufgabe 2 (11 Punkte) Gegeben seien die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto -2ye^{(x^2)},$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 + y^2 - \frac{9}{2}.$$

sowie der Kreis

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Wir betrachten die Einschränkung $f|_D$ von f auf D . Bestimmen Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von $f|_D$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

(a) Führen Sie eine reelle Partialbruchzerlegung für den folgenden Ausdruck durch.

$$\frac{x}{(x-1)^2}$$

(b) Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$.

(c) Zeigen Sie, dass das folgende uneigentliche Integral konvergiert.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx.$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{4+3n}}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte) Sei \mathbb{E} das Standardkoordinatensystem sowie ${}_{\mathbb{F}}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^T$ der Koordinatenvektor des Punktes P bezüglich des Koordinatensystems

$$\mathbb{F} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Bestimmen Sie den Standardkoordinatenvektor von P .

(b) Bestimmen Sie das Bild von $v \in \mathbb{R}^3$ unter der Koordinatentransformation ${}_{\mathbb{F}}\kappa_{\mathbb{E}}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte) Gegeben sei die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

welche eine Spiegelung an der Ebene

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 \right\}$$

beschreibt, sowie die Ebene E , welche durch die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft.

- (a) Bestimmen Sie eine Hesse-Normalform von E .
- (b) Bestimmen Sie die Bildebene $E' := \varphi(E) = \{\varphi(x) \mid x \in E\}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin(x^3)}{x}$.
- (b) Berechnen Sie die folgenden Reihenwerte.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$

(ii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n!}$

(iii) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3-n}{n!}$

Name,

Vorname:

Matrikel-

Nummer:

Studien-

gang:

Aufgabe 8 (10 Punkte) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter und

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Sei zunächst $\alpha = 3$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge \mathcal{L} von

$$A_3 v = 4v + b$$

mit $b = (-4 \ 2 \ 1 \ 0)^\top$:

$\mathcal{L} =$

Im Folgenden sei $\alpha \in \mathbb{R}$ wieder beliebig.

(b) Bestimmen Sie die Determinante $\det(A_\alpha)$ in Abhängigkeit von α :

$\det(A_\alpha) =$

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A_α nicht invertierbar? $\alpha \in \left\{ \boxed{} \right\}$

(d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ in faktorisierten Form:

$\chi_{A_\alpha}(\lambda) =$

(e) Ein Eigenwert ist offenbar $\alpha + 1$. Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten ebendieses Eigenwertes in Abhängigkeit von α :

