Davide Veniani (Dozent)
Marius Nitzsche (Assistent)

Modulprüfung (Module 41990 und 107730)

12.03.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **8 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 5 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Bitte schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 $(2+1+1+1)$**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz, bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $\dfrac{12n^9 - n^3}{4n^9 + n^2 + 1}$

(b) $\dfrac{7n^3 + \cos(2n)}{n^3 + 11\cos(n^4)}$

(c) $2\arctan(n) + n\ln\left(1 - \dfrac{\pi}{n}\right)$

(d) $(-1)^{n(n+1)}$

Aufgabe 2 $(1+2+1+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die folgende Funktion, die von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{für } x < 0, \\ \exp(a-x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f(-\pi)$ und $f(3)$.

(b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.

(d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x \to +\infty$.

Aufgabe 3 $(1+1+2+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -x^4 + 2x^2 + 1.$$

(a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(c) Untersuchen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g.

(d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g.

Aufgabe 4 ($1+2+1+1$ Punkte)**.** Ein Unternehmen analysiert die Preiselastizität der Nachfrage für eines seiner Produkte. Die Nachfragefunktion ist gegeben durch:

$$N(p) = 100 - 2p, \quad p \geq 0,$$

wobei $N(p)$ die nachgefragte Menge (in Einheiten) und p der Preis (in Geldeinheiten) sind.

(a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich der Nachfragefunktion $N(p)$, unter Berücksichtigung der Bedingungen, dass sowohl der Preis als auch die nachgefragte Menge nicht negativ sein müssen.

(b) Leiten Sie die allgemeine Formel für die Wachstumsrate und für Preiselastizität der Nachfrage her.

(c) Prüfen Sie, ob die Nachfrage bei $p = 10$ bzw. $p = 30$ elastisch oder unelastisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $P(N)$, das heißt die Umkehrfunktion von $N(p)$.

Aufgabe 5 ($1+1+1+2$ Punkte)**.** Gegeben sind die Nachfrage- und Angebotsfunktionen:

$$D(p) = 120 - p, \qquad S(p) = 2p,$$

wobei $D(p)$ die nachgefragte Menge, $S(p)$ die angebotene Menge und p der Preis sind.

(a) Berechnen Sie die Grenznachfragefunktion.

(b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis p^*, bei dem sich Nachfrage und Angebot ausgleichen: $D(p^*) = S(p^*)$.

(c) Berechnen Sie die entsprechende Gleichgewichtsmenge q^*, indem Sie $D(p^*)$ oder $S(p^*)$ auswerten.

(d) Ermitteln Sie die Konsumentenrente. Dazu berechnen Sie die Differenz zwischen der Zahlungsbereitschaft der Konsumenten und dem tatsächlich gezahlten Betrag, basierend auf:

$$\text{Konsumentenrente} = \int_0^{p^*} D(p)\, dp \; - \; p^* \cdot q^*.$$

Hinweis: Das Ergebnis liegt zwischen 500 und 1000.

Aufgabe 6 (1+1+1+1+1 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 2$.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 1$.

(e) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Aufgabe 7 $(1 + 1 + 2 + 1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_4 = 7. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A.

Aufgabe 8 $(1 + 1 + 1 + 2$ Punkte$)$**.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = 32x - 2xy^2 - x^4.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass die Punkte $(0, 4)$ und $(2, 0)$ kritische Punkte der Funktion f sind.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Untersuchen Sie die Punkte $(0, 4)$ und $(2, 0)$ hinsichtlich ihres Charakters: Handelt es sich um lokale Minimalstellen, lokale Maximalstelle oder Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.