Modulprüfung (Module 41990 und 107730) mit Lösungen

12.03.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **8 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 5 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Bitte schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.
- Kleine formale Ungenauigkeiten, die das Ergebnis nicht beeinflussen, führen zu keinem Punktabzug.

)

Aufgabe 1 $(2+1+1+1)$**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz, bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $\dfrac{12n^9 - n^3}{4n^9 + n^2 + 1}$

(b) $\dfrac{7n^3 + \cos(2n)}{n^3 + 11\cos(n^4)}$

(c) $2\arctan(n) + n\ln\left(1 - \dfrac{\pi}{n}\right)$

(d) $(-1)^{n(n+1)}$

Lösung. (2 Punkte für den ersten korrekt ausgerechneten Grenzwert. 1 Punkt für jeden weiteren korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Die Folge konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12n^9 - n^3}{4n^9 + n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^9(12 - n^{-6})}{n^9(4 + n^{-7} + n^{-9})} = \lim_{n\to\infty} \frac{12 - n^{-6}}{4 + n^{-7} + n^{-9}} = \frac{12}{4} = 3.$$

(b) Die Folge konvergiert und es gilt wegen des Sandwichsatzes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^3 + \cos(2n)}{n^3 + 11\cos(n^4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(7 + \frac{\cos(2n)}{n^3}\right)}{n^3\left(1 + \frac{11\cos(n^4)}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 + \frac{\cos(2n)}{n^3}}{1 + \frac{11\cos(n^4)}{n^3}} = 7.$$

(c) Zunächst haben wir

$$\lim_{n\to\infty} 2\arctan(n) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Wegen $n\ln(a) = \ln(a^n)$ und der Stetigkeit vom Logarithmus gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1 - \frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{\pi}{n}\right)^n = \ln(e^{-\pi}) = -\pi.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \left(2\arctan(n) + n\ln\left(1 - \frac{\pi}{n}\right)\right) = \pi - \pi = 0.$$

(d) Die Zahl $n(n+1)$ ist immer gerade, denn entweder n oder $n+1$ gerade ist. Damit gilt $(-1)^{n(n+1)} = 1$ für jedes n und

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n(n+1)} = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 2 $(1+2+1+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die folgende Funktion, die von dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{für } x < 0, \\ \exp(a-x) & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f(-\pi)$ und $f(3)$.

(b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

(c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.

(d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x \to +\infty$.

Lösung. (a) (0,5 Punkte pro Funktionswert) Es gilt

$$f(-\pi) = \frac{\sin(-2\pi)}{-\pi} = 0, \qquad f(0) = \exp(a-3) = e^{a-3}.$$

(b) (2 Punkte, falls alles richtig ist. Sonst 1 Punkt für die Erwähnung der Regel von de l'Hospital oder 1 Punkt für den korrekten Unterschied zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert) Mit der Regel von de l'Hospital erhalten wir

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\cos(2x)}{1} = 2\cos(2 \cdot 0) = 2.$$

Auf der anderen Seite erhalten wir wegen Stetigkeit

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \exp(a-x) = e^a.$$

(c) (1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für die korrekte Bedingung) Damit die Funktion f in 0 stetig ist, müssen die links- und rechtsseitigen Grenzwerte übereinstimmen:

$$2 = e^a.$$

Dementsprechend muss gelten:

$$a = \ln(2).$$

(d) (1 Punkt) Wir haben

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \exp(a-x) = \lim_{x \to +\infty} e^a \cdot e^{-x} = 0.$$

Also besitzt die Funktion f die Asymptote $y = 0$ für $x \to +\infty$. □

Aufgabe 3 $(1+1+2+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto -x^4 + 2x^2 + 1.$$

(a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(c) Untersuchen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g.

(d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Wegen

$$g(-x) = -(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1 = -x^4 + 2x^2 + 1 = g(x)$$

ist g eine gerade Funktion.

(Nur 0,5 Punkte, wenn die Bedingung $g(x) = g(-x)$ nur an einer bestimmten Stelle überprüft wird, z. B. $x = 1$, und nicht für alle $x \in \mathbb{R}$.)

(b) (1 Punkt.) Wir haben

$$g'(x) = -4x^3 + 4x, \qquad g''(x) = -12x^2 + 4.$$

(c) (2 Punkte.) Zunächst untersuchen wir die kritischen Punkten von g. Aus $g'(x) = 0$ erhalten wir $-4x(x^2-1) = 0$. Diese Gleichung hat 3 Lösungen:

$$x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = 1.$$

(Wegen $g''(-1) = g''(1) = -8 < 0$ ist $x = -1$ sowie $x = 1$ eine lokale Maximalstelle. Wegen $g''(0) = 4 > 0$ ist $x = 0$ eine lokale Minimalstelle.)

Anschließend berechnen wir:

$$g(-1) = g(1) = 2, \qquad g(0) = 1.$$

Zudem untersuchen wir die Randpunkte:

$$g(-2) = g(2) = -7.$$

Damit haben wir:

- Globale Minimalstellen: -2, 2.
- Globale Maximalstellen: -1, 1.

(Höchstens 0,5 Punkte wegen Rechenfehler abziehen. Wichtig ist, dass die Gleichung $g'(x) = 0$ richtig gestellt und gelöst wird und dass die Randpunkte berücksichtigt werden.)

(d) (1 Punkt.) Um die Wendestellen von g zu finden, lösen wir die Gleichung $g'' = 0$ und finden 2 Lösungen

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Alternativ zählt hier auch $\frac{\sqrt{192}}{24}$.) (Diese sind tatsächlich Wendestellen, denn $g'''(x) = -24x$ ist an den Stellen nicht null.) $\square$

Aufgabe 4 $(1+2+1+1$ Punkte$)$**.** Ein Unternehmen analysiert die Preiselastizität der Nachfrage für eines seiner Produkte. Die Nachfragefunktion ist gegeben durch:

$$N(p) = 100 - 2p, \quad p \geq 0,$$

wobei $N(p)$ die nachgefragte Menge (in Einheiten) und p der Preis (in Geldeinheiten) sind.

(a) Bestimmen Sie den sachlichen Definitionsbereich der Nachfragefunktion $N(p)$, unter Berücksichtigung der Bedingungen, dass sowohl der Preis als auch die nachgefragte Menge nicht negativ sein müssen.

(b) Leiten Sie die allgemeine Formel für die Wachstumsrate und für Preiselastizität der Nachfrage her.

(c) Prüfen Sie, ob die Nachfrage bei $p = 10$ bzw. $p = 30$ elastisch oder unelastisch ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $P(N)$, das heißt die Umkehrfunktion von $N(p)$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Es muss sowohl $p \geq 0$ als auch $N(p) = 100-2p \geq 0$ gelten. Damit erhalten wir:

$$0 \leq p \leq 50.$$

(Richtige Antwort ist auch das abgeschlossene Intervall $[0, 50]$. Nur 0,5 Punkte für das offene Intervall $(0, 50)$.)

(b) (1 Punkt für die Wachstumsrate, 1 Punkt für die Elastizität. Sonst 0,5 Punkte für eine korrekte Definition mit richtiger Wahl der Variablen oder 0,5 Punkte für die Ableitung $N'(p)$.) Nach Definition von Wachstumsrate haben wir

$$KN(p) = \frac{N'(p)}{N(p)} = \frac{-2}{100-2p} = \frac{1}{p-50}.$$

Nach Definition von Elastizität erhalten wir

$$EN(p) = KN(p) \cdot p = \frac{p}{p-50}.$$

(Die Antwort ist richtig, auch wenn die 2 nicht gekürzt wird.)

(c) (1 Punkt.) Bei $p = 10$ gilt

$$EN(10) = \frac{10}{10-50} = -\frac{1}{4}.$$

Wegen $|EN(10)| < 1$ ist die Nachfrage bei $p = 10$ unelastisch.

Bei $p = 30$ gilt

$$EN(30) = \frac{30}{30 - 50} = -\frac{3}{2}.$$

Wegen $|EN(30)| > 1$ ist die Nachfrage bei $p = 30$ elastisch.

(d) (1 Punkt.) Nennen wir x die Nachfrage, so schreiben wir $x = 100 - 2p$ und lösen diese Gleichung nach p. Damit erhalten wir die Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = \frac{1}{2}(100 - x).$$

□

Aufgabe 5 $(1+1+1+2$ Punkte$)$**.** Gegeben sind die Nachfrage- und Angebotsfunktionen:

$$D(p) = 120 - p, \qquad S(p) = 2p,$$

wobei $D(p)$ die nachgefragte Menge, $S(p)$ die angebotene Menge und p der Preis sind.

(a) Berechnen Sie die Grenznachfragefunktion.

(b) Bestimmen Sie den Gleichgewichtspreis p^*, bei dem sich Nachfrage und Angebot ausgleichen: $D(p^*) = S(p^*)$.

(c) Berechnen Sie die entsprechende Gleichgewichtsmenge q^*, indem Sie $D(p^*)$ oder $S(p^*)$ auswerten.

(d) Ermitteln Sie die Konsumentenrente. Dazu berechnen Sie die Differenz zwischen der Zahlungsbereitschaft der Konsumenten und dem tatsächlich gezahlten Betrag, basierend auf:

$$\text{Konsumentenrente} = \int_0^{p^*} D(p)\,dp \;-\; p^* \cdot q^*.$$

Hinweis: Das Ergebnis liegt zwischen 500 und 1000.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Grenznachfragefunktion ist die Ableitung der Nachfragefunktion:

$$D'(p) = -1.$$

(Nur 0,5 Punkte, falls D' falsch berechnet wird.)

(b) (1 Punkt.) Aus der Gleichung $D(p^*) = S(p^*)$, also

$$120 - p^* = 2p^*,$$

erhalten wir $p^* = 40$.

(c) (1 Punkt.) Wir berechnen $q^* = D(p^*) = 120 - 40 = 80$.

(d) (2 Punkte.) Wir berechnen das Integral:

$$\int_0^{p^*} D(p)\,dp = \int_0^{40} (120 - p)\,dp = \left[120p - \frac{1}{2}p^2\right]_0^{40}$$
$$= 120 \cdot 40 - \frac{1}{2}40^2 = 4800 - 800 = 4000.$$

Die Konsumentenrenten ist damit gegeben durch

$$\int_0^{p^*} D(p)\,dp - p^* \cdot q^* = 4000 - 40 \cdot 80 = 800. \qquad \square$$

(Mindestens 1 Punkt, falls die Werte korrekt eingesetzt werden, z. B.

$$\int_0^{p^*} D(p)\,dp - p^* \cdot q^* = \int_0^{40} (120 - p)\,dp - 40 \cdot 80.$$

Außerdem: 0,5 Punkte, falls die Antwort nicht zwischen 500 und 1000 liegt und das bemerkt wird.)

Aufgabe 6 (1+1+1+1+1 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 2 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 2$.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 1$.

(e) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = 0$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Damit die Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch ist, muss $a_{13} = a_{31}$ gelten. Da aber $a_{13} = 1$ und $a_{31} = 0$, ist das nie der Fall.

(0,5 Punkte für die Antwort $a = 2$.)

(0,5 Punkte, falls die transponierte Matrix A^T korrekt aufgeschrieben wird.)

(b) (1 Punkt für das korrekte Ergebnis. Sonst 0,5 Punkt für eine korrekte Anwendung der Definition von Determinante.) Mit der Formel für die Determinante von $(3,3)$-Matrizen erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A) &= a \cdot 2a \cdot (a-1) - (a-1) \cdot 2 \cdot a \\ &= 2a^3 - 2a^2 - 2a^2 + 2a \\ &= 2a^3 - 4a^2 + 2a. \end{aligned}$$

(Fakultativ) Die Determinante kann folgendermaßen faktorisiert werden:

$$\det(A) = 2a(a-1)^2.$$

(c) (1 Punkt. Sonst 0,5 Punkte für das korrekte Einsetzen von $a = 2$ in die Matrix.) Für $a = 2$ ist $\det(A) \neq 2$. Das heißt, dass die Matrix A vollen Rang 3 hat.

(d) (1 Punkt. Sonst 0,5 Punkte für das korrekte Einsetzen von $a = 1$ in die Matrix.) Wir setzen $a = 1$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alle Spalten der Matrix sind gleich und ungleich 0. Dementsprechend hat die Matrix Rang 1.

(e) (1 Punkt. Sonst 0,5 Punkte für das korrekte Einsetzen von $a = 0$ in die Matrix.) Wir setzen $a = 0$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die erste und die dritte Spalte sind linear unabhängig, also ist der Rang von A größer gleich 2. Der Rang kann aber nicht gleich 3 sein, denn $\det(A) = 0$. Also ist der Rang genau gleich 2. $\square$

Aufgabe 7 (1 + 1 + 2 + 1 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_4 = 7. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Überprüfen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems darstellt.

(c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Koeffizientenmatrix und der Vektor $\mathbf{b}$ sind folgendermaßen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt) Es gilt

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{b}.$$

Damit ist $\mathbf{x}$ keine Lösung des linearen Gleichungssystems.

(Keine Punkte für eine Antwort ohne Erklärung.)

(c) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 für jeden sinnvollen Schritt (bis 1,5 Punkte). Pivots müssen nicht hervorgehoben werden.) Wir schreiben die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen sie anschließend in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{5}\mathbf{z}_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_2 + 4\mathbf{z}_3 \\ \\ \end{array}$$

Aus der reduzierten Zeilenstufenform lesen wir Folgendes ab: Die Koordinaten x_1, x_2, x_4 sind Basiskoordinaten, die Koordinate x_3 ist frei. Deshalb schreiben wir $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 1 + t, \qquad x_4 = 1.$$

Also besteht die Lösungsmenge aus allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

(d) (1 Punkt.) Der Rang von A ist gleich 3, denn die (reduzierte) Zeilenstufenform hat 3 Pivots.

Aufgabe 8 (1 + 1 + 1 + 2 Punkte)**.** Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = 32x - 2xy^2 - x^4.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion f.

(b) Zeigen Sie, dass die Punkte $(0,4)$ und $(2,0)$ kritische Punkte der Funktion f sind.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Untersuchen Sie die Punkte $(0,4)$ und $(2,0)$ hinsichtlich ihres Charakters: Handelt es sich um lokale Minimalstellen, lokale Maximalstelle oder Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir berechnen den Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 32 - 2y^2 - 4x^3 \\ -4xy \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt) Tatsächlich gilt

$$\nabla f(0,4) = \begin{pmatrix} 32 - 2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 0^3 \\ -4 \cdot 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

und

$$\nabla f(2,0) = \begin{pmatrix} 32 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 2^3 \\ -4 \cdot 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) (1 Punkt.) Ein kritischer Punkt erfüllt $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$, also:

$$\begin{cases} 32 - 2y^2 - 4x^3 = 0, \\ -4xy = 0. \end{cases}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$.

- **Fall 1:** $x = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $32 - 2y^2 = 0$, also $y^2 = 16$ und somit $y = \pm 4$. Daraus ergeben sich die kritischen Punkte $(0,4)$ und $(0,-4)$.
- **Fall 2:** $y = 0$. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $32 - 4x^3 = 0$, also $x^3 = 8$ und somit $x = 2$. Daraus ergibt sich der kritische Punkt $(2,0)$.

Insgesamt erhalten wir die drei kritischen Punkte:

$$(0,4), \quad (0,-4), \quad (2,0).$$

(d) (1 Punkt) Wir berechnen die Hesse-Matrix von f:

$$\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2 & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix}.$$

(0,5 Punkte) Zunächst setzen wir $(x,y) = (0,4)$ ein und erhalten

$$\mathrm{H}f(0,4) = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix indefinit ist, ist $(0,4)$ ein Sattelpunkt.

(0,5 Punkte) Nun setzen wir $(x,y) = (2,0)$ ein und erhalten

$$\mathrm{H}f(2,0) = \begin{pmatrix} -48 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix negativ definit ist, ist $(2,0)$ eine lokale Maximalstelle.

□