

Modulprüfung (Nr. 1077320000)

19.03.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **9 Aufgaben**.
- Je nach Aufgabe können 4 oder 6 Punkte erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworten müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte). Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz, berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{5^k}$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{7 \cdot k!}$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k}$

(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-25)^k \pi^{2k}}{(2k)!}$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \exp(ax) + b \arctan(x).$$

- (a) Berechnen Sie f' und f'' .
- (b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.
- (c) Bestimmen Sie a und b , sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = 1 + x + 2x^2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Gegeben sei die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahl

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

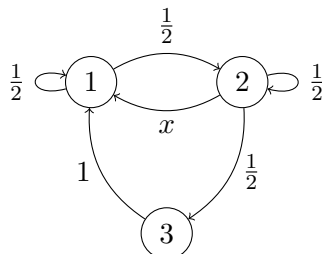
- (a) Berechnen Sie den komplex konjugierten Wert \bar{z} und den Betrag $|z|$ der Zahl z .
- (b) Stellen Sie z in Polarform dar.
- (c) Bestimmen Sie das Real- und Imaginärteil von z^{2025} .

Aufgabe 4 (6 Punkte). Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = (1, 0, 0)^T$ ein Eigenvektor von A ist.
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit der entsprechenden algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit.
- (c) Ermitteln Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte). Betrachten Sie die Markow-Kette gegeben durch den folgenden Übergangsgraphen:



- Bestimmen Sie $x \in [0, 1]$ und schreiben Sie die entsprechende Übergangsmatrix auf.
- Berechnen Sie $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.
- Ermitteln Sie alle Kommunikationsklassen. Ist die Markow-Kette irreduzibel?
- Finden Sie alle stationären Verteilungen.

Aufgabe 6 (6 Punkte). Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 6e^x.$$

- Schreiben Sie das charakteristische Polynom auf und finden Sie alle Nullstellen mit jeweiliger Vielfachheit.
- Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.
- Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.
- Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 6.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte). Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = -y^5.$$

- Bestimmen Sie, ob die Differentialgleichung linear bzw. separierbar ist.
- Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte). Betrachten Sie die Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$4y_{k+2} - 5y_{k+1} + y_k = 0, \quad y_0 = 5, \quad y_1 = \frac{7}{2}.$$

- (a) Berechnen Sie y_2 als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.
- (b) Finden Sie eine abgeschlossene Formel für das allgemeine Folgenglied y_k .
- (c) Ermitteln Sie $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k$.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Betrachten Sie das Polygon Π im ersten Quadranten von \mathbb{R}^2 gegeben durch das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$x_1 \leq 10 \quad x_2 \leq 10, \quad x_1 + x_2 - 14 \leq 0.$$

- (a) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass das Ungleichungssystem als $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ dargestellt werden kann.
- (b) Skizzieren Sie das Polygon Π und bestimmen Sie seine Ecken.
- (c) Finden Sie das Maximum und die Maximalstelle auf Π der Funktion

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2.$$