Modulprüfung (Nr. 1077320000) mit Lösungen

19.03.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **9 Aufgaben**.
- Je nach Aufgabe können 4 oder 6 Punkte erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.

)

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz, berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{7^k}{5^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{7 \cdot k!}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-25)^k \pi^{2k}}{(2k)!}$

Lösung. (a) (1 Punkt) Die Folge $\frac{7^k}{5^k}$ ist keine Nullfolge, denn es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{7^k}{5^k} = +\infty.$$

Die Reihe divergiert also wegen des Trivialkriteriums.

(b) (1 Punkt) Wir erkennen die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{5}{7}} = \frac{7}{2}.$$

(c) (1 Punkt) Wir erkennen die Taylorreihe der Exponentialfunktion:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{7 \cdot k!} = \frac{1}{7}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} - \frac{5^0}{0!} - \frac{5^1}{1!}\right) = \frac{1}{7}\big(e^5 - 6\big).$$

(d) (1 Punkt) Wir erkennen die Taylorreihe des Kosinus:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-25)^k \pi^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (5\pi)^{2k}}{(2k)!} = \cos(5\pi) - 1 = -2. \qquad \square$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \exp(ax) + b\arctan(x).$$

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie a und b, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = 1 + x + 2x^2.$$

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$f'(x) = a\exp(ax) + \frac{b}{1+x^2},$$
$$f''(x) = a^2\exp(ax) - \frac{2bx}{(1+x^2)^2}.$$

(b) (2 Punkte) Wir haben

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = a + b, \quad f''(0) = a^2.$$

Dementsprechend ist das zweite Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T_2(x) = 1 + (a+b)x + \frac{a^2}{2}x^2.$$

(c) (1 Punkt) Damit $T_2(x) = 1 + x + 2x^2$ muss gelten

$$a + b = 1, \quad \frac{a^2}{2} = 2. \qquad \square$$

Daraus folgt $(a, b) = (2, -1)$ oder $(a, b) = (-2, 3)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Gegeben sei die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahl

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(a) Berechnen Sie den komplex konjugierten Wert $\bar{z}$ und den Betrag $|z|$ der Zahl z.

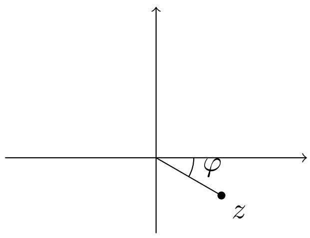
(b) Stellen Sie z in Polarform dar.

(c) Bestimmen Sie das Real- und Imaginärteil von z^{2025}.

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{und} \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

(b) (2 Punkte) Wir suchen r, φ mit $z = re^{i\varphi}$. Wir haben schon $r = |z| = 1$ ausgerechnet. Das Argument φ kann graphisch ermittelt werden: $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.



Also gilt $z = e^{-\frac{1}{6}\pi i}$.

(c) (1 Punkt) Teilen wir 2025 durch 6, so ergibt sich ein Quotient von 337 mit einem Rest von 3. Daher können wir schreiben:

$$z^{2025} = \left(e^{-\frac{1}{6}\pi i}\right)^{6 \cdot 337 + 3} = e^{-337\pi i} \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi i} = (-1) \cdot (-i) = i.$$

Abschließend erhalten wir:

$$\operatorname{Re}(z^{2025}) = 0, \qquad \operatorname{Im}(z^{2025}) = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob der Vektor $\mathbf{x} = (1, 0, 0)^\intercal$ ein Eigenvektor von A ist.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A mit der entsprechenden algebraischen bzw. geometrischen Vielfachheit.

(c) Ermitteln Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist.

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{x},$$

also ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1.

(b) (4 Punkte) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Daher hat A zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 bzw. 2.

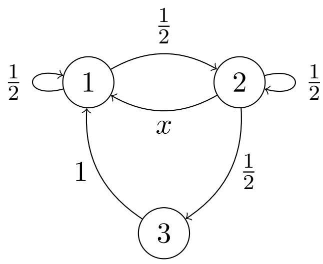
Die geometrische Vielfachheit von λ_1 ist dann automatisch gleich 1.

Die geometrische Vielfachheit von λ_2 ist gleich

$$3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

(c) (1 Punkt) Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar, da die geometrische Vielfachheit von λ_2 kleiner ist als ihre algebraische Vielfachheit. □

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Markow-Kette gegeben durch den folgenden Übergangsgraphen:



(a) Bestimmen Sie $x \in [0,1]$ und schreiben Sie die entsprechende Übergangsmatrix auf.

(b) Berechnen Sie $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.

(c) Ermitteln Sie alle Kommunikationsklassen. Ist die Markow-Kette irreduzibel?

(d) Finden Sie alle stationären Verteilungen.

Lösung. (a) (1 Punkt) Es muss $x = 0$ sein. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt) Wir berechnen

$$M^2 = \begin{pmatrix} * & * & \frac{1}{4} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Dementsprechend gilt

$$P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{4}.$$

(c) (1 Punkt) Es gibt eine einzige Kommunikationsklassen, nämlich $\{1, 2, 3\}$. Insbesondere ist die Markow-Kette irreduzibel.

(d) (1 Punkt) Wir wenden das gaußsche Eliminationsverfahren auf die folgende Matrix an:

$$M^\intercal - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Linkseigenraum zu 1 von M ist also erzeugt vom Vektor $(2, 2, 1)$. Dementsprechend ist die einzige stationäre Verteilung gegeben durch

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right). \qquad \square$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 6e^x.$$

(a) Schreiben Sie das charakteristische Polynom auf und finden Sie alle Nullstellen mit jeweiliger Vielfachheit.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(c) Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 6.$$

Lösung. (a) (2 Punkte) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^2 - 2\lambda + \lambda = \\ &= (\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von P ist $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 2.

(b) (1 Punkt) Die Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung können von P abgelesen werden und sind gegeben durch

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

(c) (2 Punkte) Die Störfunktion $6e^x$ ist von der Form $ae^{\mu x}$ mit $a = 6$ und $\mu = 1$. Da μ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von Vielfachheit 2 ist, benutzen wir den Ansatz

$$y_p(x) = cx^2 e^x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zuerst berechnen wir die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2cxe^x + cx^2 e^x, \\ y_p''(x) &= 2ce^x + 4cxe^x + cx^2 e^x. \end{aligned}$$

Wir setzen nun den Ansatz in die Differentialgleichung ein:

$$(2ce^x + 4cxe^x + cx^2 e^x) - 2(2cxe^x + cx^2 e^x) + cx^2 e^x = 6e^x.$$

Daraus folgt $c = 3$, sprich

$$y_p(x) = 3x^2 e^x.$$

(d) (1 Punkt) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = 3x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Zuerst berechnen wir die erste Ableitung:

$$y'(x) = 6xe^x + 6x^2 e^x + c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x.$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein und erhalten

$$\begin{aligned} c_1 &= 4, \\ c_1 + c_2 &= 6. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Lineargleichungssystems lautet $c_1 = 4$, $c_2 = 2$. Dementsprechend ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = 3x^2 e^x + 4e^x + 2xe^x. \qquad \square$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = -y^5.$$

(a) Bestimmen Sie, ob die Differentialgleichung linear bzw. separierbar ist.

(b) Lösen Sie das entsprechende Anfangswertproblem mit $y(0) = \frac{1}{2}$.

Lösung. (a) (1 Punkt) Es handelt sich hier um eine separierbare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f(x)g(y(x)),$$

mit $f(x) = 1$ und $g(y) = -y^5$.

(b) (3 Punkte: 1 Punkt für G, 0,5 Punkte für F, 0,5 Punkte für die explizite Gleichung $G(y) = F(x) + c$ und 1 Punkt für die Lösung.) Wir berechnen

$$G(y) = \int g(y)\,dy = -\int \frac{1}{y^5}\,dx = \frac{1}{4y^4}, \quad F(x) = \int f(x)\,dx = x.$$

Wir suchen eine Konstante c mit

$$G(y(x)) = F(x) + c.$$

Setzen wir die Anfangsbedingung $y(0) = \frac{1}{2}$ ein, so finden wir

$$\frac{2^4}{4} = 0 + c$$

und finden $c = 4$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{4(x+4)}}.$$ □

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$4y_{k+2} - 5y_{k+1} + y_k = 0, \quad y_0 = 5, \quad y_1 = \frac{7}{2}.$$

(a) Berechnen Sie y_2 als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Finden Sie eine abgeschlossene Formel für das allgemeine Folgenglied y_k.

(c) Ermitteln Sie $\lim_{k\to\infty} y_k$.

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir haben

$$y_2 = \frac{1}{4} \cdot (5y_1 - y_0) = \frac{1}{4} \cdot \left(5 \cdot \frac{7}{2} - 5\right) = \frac{25}{8}.$$

(b) (2 Punkte) Das charakteristische Polynom lautet

$$P(\lambda) = 4\lambda^2 - 5\lambda + 1.$$

Die Nullstellen von P sind wegen der Mitternachtsformel gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{4}$. Also sind alle Lösungen der angegebenen Differenzengleichung gegeben durch

$$y_k = c_1 + \frac{c_2}{4^k}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen die Anfangsbedingungen ein und erhalten

$$c_1 + c_2 = 5, \quad c_1 + \frac{c_2}{4} = \frac{7}{2},$$

sprich $c_1 = 3$, $c_2 = 2$. Damit ist das allgemeine Folgenglied gegeben durch

$$y_k = 3 + \frac{2}{4^k}.$$

(c) (1 Punkt) Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \left(3 + \frac{2}{4^k}\right) = 3. \qquad \square$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das Polygon Π im ersten Quadranten von $\mathbb{R}^2$ gegeben durch das folgende lineare Ungleichungssystem:

$$x_1 \leq 10 \quad x_2 \leq 10, \quad x_1 + x_2 - 14 \leq 0.$$

(a) Finden Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, sodass das Ungleichungssystem als $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ dargestellt werden kann.

(b) Skizzieren Sie das Polygon Π und bestimmen Sie seine Ecken.

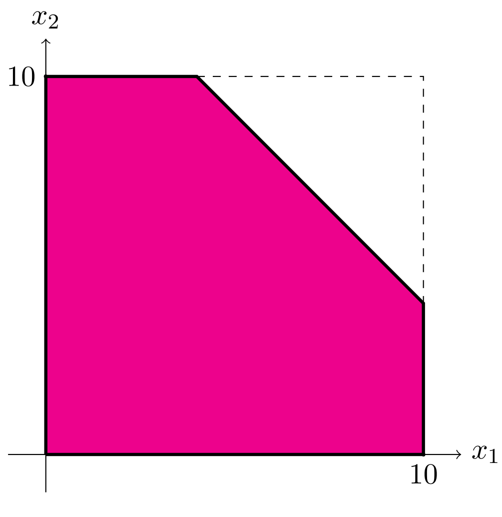
(c) Finden Sie das Maximum und die Maximalstelle auf Π der Funktion

$$F(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2.$$

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir können A und $\mathbf{b}$ folgendermaßen wählen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt) Das Polygon Π sieht folgendermaßen aus:



Seine Ecken sind $(0,0), (10,0), (10,4), (4,10), (0,10)$.

(c) (2 Punkte) Wir stellen das Ausgangstableau auf:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 14 \\ \hline -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir wenden nun das Simplex-Verfahren an:

$$\text{Ausgangstableau} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 10 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 34 \end{array}\right)$$

Das Maximum von F auf Π ist also gleich 34 und wird an der Stelle $(x_1, x_2) = (4, 10)$ erreicht. $\square$