Klausur zur Höheren Mathematik 1

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 3** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 4 – 8** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13.10.2025 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom 20.10.2025 bis 22.10.2025 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*7 Punkte*) Zum Parameter $\beta \in \mathbb{R}$ sei die Quadrik

$$Q_\beta := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1-\beta)x_3^2 + 4x_3 = 0 \right\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $A_\beta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$x^\intercal A_\beta x + 2a^\intercal x + c = 7x_1^2 + 2x_2^2 + (1-\beta)x_3^2 + 4x_3$$

(b) Bestimmen Sie abhängig von β eine euklidische Normalform sowie die Gestalt der Quadrik.

Aufgabe 2 (*6 Punkte*) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine Rechtsinverse R von A, also eine Matrix R mit $AR = \mathrm{E}_3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ des Gleichungssystems $Av = b$.

Aufgabe 3 (*7 Punkte*) Gegeben sei die folgende, vom Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix:

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2+\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Ein Eigenwert ist offenbar $\lambda_1 = 1$. Bestimmen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $\chi_{A_\gamma}(\lambda)$.

(c) Für welche $\gamma \in \mathbb{R}$ ist A_γ invertierbar?

(d) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte in Abhängigkeit von γ.

(e) Für welche Werte für γ ist A_γ diagonalisierbar?

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Zeigen Sie induktiv:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $k = k(n) \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 - n = 3k$.

IA Induktionsanfang:

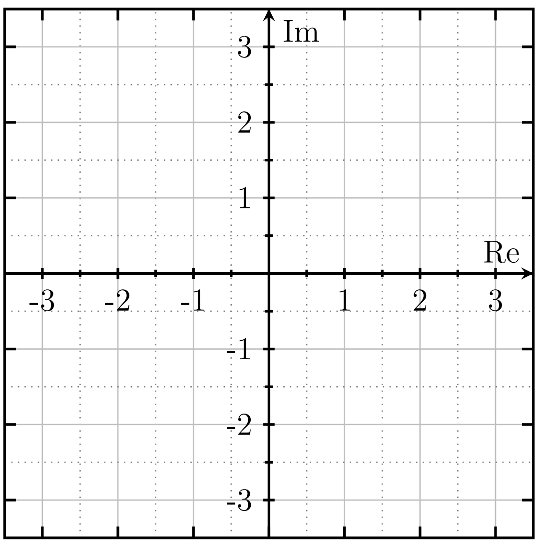
IH Für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert $k(n) \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 - n = 3k(n)$.

IS Induktionsschluss: $n \to n+1$

Aufgabe 5 (*5 Punkte*) Sei M die Menge $M = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 1 < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\operatorname{Im}(z) + \frac{3}{2} \text{ und } \operatorname{Im}(z) < 2 \right\}$ und f die Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \mathrm{i} \cdot z - 1\,.$$

Skizzieren Sie M sowie das Bild $f(M)$ in der Gaußschen Zahlenebene:



Aufgabe 6 (*3 Punkte*) Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{L}(v_1) = \mathrm{L}(w_1)$ und $\mathrm{L}(v_1, v_2) = \mathrm{L}(w_1, w_2)$.

$w_1 =$ $\boxed{}$ $w_2 =$ $\boxed{}$ $w_3 =$ $\boxed{}$

Aufgabe 7 (*6 Punkte*)

(a) Berechnen Sie folgende Grenzwerte. Tragen Sie „divergent“ ein, falls kein Grenzwert existiert.

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{5^k} = \boxed{}$ (ii) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2 - 3n} - \sqrt{4n^2 + 8n}\right) = \boxed{}$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{e}^{1-n}} = \boxed{}$ (iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n!} \cdot 6n^3 - 7}{8n^3 - 11} = \boxed{}$

(v) $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{(k+1)^3 + 4k + 6} - \frac{1}{k^3 + 4k + 2} \right) = \boxed{}$

(b) Bestimmen Sie den folgenden Häufungspunkt: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{3} + 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \right) = \boxed{}$

Aufgabe 8 (*3 Punkte*) Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ mit Basis $\mathcal{E}\colon \mathrm{e}_1 = 1, \mathrm{e}_2 = \mathrm{i}$ sowie die folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung:

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \mathrm{Im}(z) + (5 - 2\mathrm{i}) \cdot z$$

(a) Geben Sie das Koordinatentupel von $w := 5 - 2\mathrm{i}$ bezüglich $\mathcal{E}$ an: ${}_{\mathcal{E}}w = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{E}}$: ${}_{\mathcal{E}}\varphi_{\mathcal{E}} = \boxed{}$

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_{\mathcal{E}}\left(\varphi^{-1}\right)_{\mathcal{E}}$ der Umkehrabbildung φ^{-1}:

$${}_{\mathcal{E}}\left(\varphi^{-1}\right)_{\mathcal{E}} = \boxed{}$$
