Klausur zur Höheren Mathematik 2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 5** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 6 – 9** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13.10.2025 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen vom 20.10.2025 bis 24.10.2025 einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*6 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}\,x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{2x^2-6x+4}\,\mathrm{d}\,x$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{-x}\sin(3x)\,\mathrm{d}\,x$

Aufgabe 2 (*3 Punkte*) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n!}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\sqrt{n})^n}$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Bestimmen Sie den folgenden Häufungspunkt: $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\arctan\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)n\right)$.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*) Gegeben sei die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto x\sin(y)\mathrm{e}^{-2x^2}.$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f und verifizieren Sie, dass $\binom{0}{0}$ eine kritische Stelle ist.

(b) Klassifizieren Sie die kritische Stelle $\binom{0}{0}$ als Minimalstelle, Maximalstelle oder Sattelstelle.

Aufgabe 5 (*5 Punkte*)

(a) Finden Sie ein Potential für folgendes Vektorfeld:

$$u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}yz\mathrm{e}^{xy}\\xz\mathrm{e}^{xy}+z^2\\\mathrm{e}^{xy}+2yz\end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$v:(0,1)\times(0,1)\to\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\mathrm{e}^{x^2y}\begin{pmatrix}\frac{2}{x}\\\frac{1}{y}\end{pmatrix}.$$

Besitzt v ein Potential?

Name, Vorname: $\boxed{\qquad\qquad}$ **Matrikel-Nummer:** $\boxed{\qquad\qquad}$ **Studiengang:** $\boxed{\qquad\qquad}$

Aufgabe 6 (5 *Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(\dfrac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x}\right)^2$.

(a) Geben Sie die folgenden Ableitungen an.

$$f'(x) = \boxed{\qquad\qquad} \qquad f''(x) = \boxed{\qquad\qquad}$$

(b) Geben Sie das Taylorpolynom der Stufe 2 im Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ an.

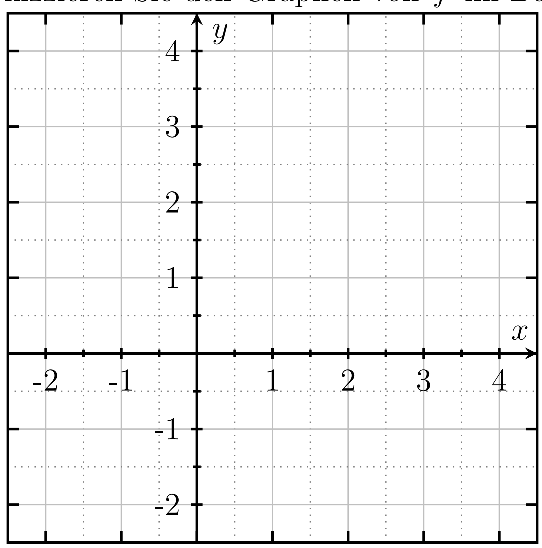
$$T_2(f, x, \pi) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Aufgabe 7 (5 *Punkte*) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}(x+1) & \text{falls } x \leqq -1 \\ \cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) & \text{falls } -1 < x < 1 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{falls } x \geqq 1 \end{cases}$.

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to -1-0} f'(x) = \boxed{\quad}, \lim_{x\to -1+0} f'(x) = \boxed{\quad}, \lim_{x\to 1-0} f'(x) = \boxed{\quad}, \lim_{x\to 1+0} f'(x) = \boxed{\quad}.$$

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Bereich $-2 \leqq x \leqq 4$:



(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist f nicht differenzierbar? $x \in \left\{\boxed{\qquad}\right\}$

Aufgabe 8 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{15n^4 - 30n^2 + 1}{3n(n+1)(2n-1)^2} =$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-3n}\right) =$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \ln(x^4 - x + 1) =$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} \tan(x-1) =$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^4 - x + 1)}{\tan(x-1)} =$$

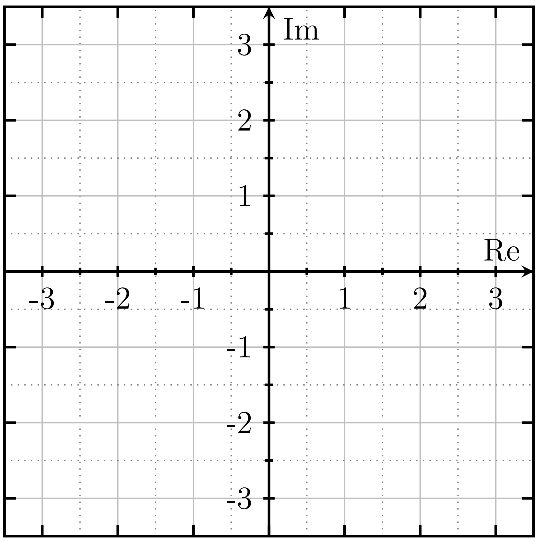
Aufgabe 9 (*6 Punkte*) Gegeben sei die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}(z + 2 - \mathrm{i})^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ sowie den Konvergenzradius ρ der Reihe:

$z_0 =$ $\qquad$ $\rho =$

(b) Skizzieren Sie z_0, den Konvergenzkreis der Potenzreihe sowie die Punkte $z_1 = -2\mathrm{i} + 1$ and $z_2 = -\dfrac{5}{2} + \mathrm{i}$ in der Gaußschen Zahlenebene:



(c) Untersuchen Sie die Reihe auf Konvergenz für die folgenden Werte von $z \in \mathbb{C}$ (Schreiben Sie für jeden der zwei Punkte entweder „konvergiert“ oder „divergiert“):

$z_1 = -2\mathrm{i} + 1$: $\qquad$ $z_2 = -\dfrac{5}{2} + \mathrm{i}$:
