Klausur zur Höheren Mathematik 1/2

für **Ingenieurstudiengänge**

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier Seiten DIN A4 eigenhändig handbeschrieben.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind **nicht zulässig!**
- In **den Aufgaben 1 – 8** sind die vollständigen Lösungswege mit allen notwendigen Begründungen anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben nehmen Sie bitte auf gesondertem Papier vor. Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt.
- In **den Aufgaben 9 – 12** werden nur die Endergebnisse gewertet. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Folgende Ableitungen, Stammfunktionen und Funktionswerte können Sie ohne weitere Herleitung verwenden. Alle anderen Ableitungen und Stammfunktionen müssen begründet werden.

$f(x)$	x^a	e^x	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$a\,x^{a-1}$	e^x	$\cos(x)$	$\frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2}$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$f(x)$	b^x	$\ln\lvert x\rvert$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	$\ln(b)\,b^x$	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sinh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}^+$

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem 13.10.2025 über das C@MPUS–Portal (`https://campus.uni-stuttgart.de/`) bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Hinweise für Wiederholer:

Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung unter bestimmten Umständen eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt die Note 4,0 oder besser.

Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, müssen am **20.10.2025** in der Sprechstunde von Prof. Stroppel (Raum 7.323) einen Termin vereinbaren. Eine individuelle schriftliche Benachrichtigung erfolgt nicht! Sie sind verpflichtet, sich rechtzeitig über das Ergebnis der schriftlichen Prüfung zu informieren und sich zum vereinbarten Zeitpunkt für die mündliche Nachprüfung bereitzuhalten.

Mit Ihrer Teilnahme an dieser Prüfung erkennen Sie diese Verpflichtungen an.

Aufgabe 1 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie für $j \in \{1,2\}$ jeweils die Lösungsmenge $\mathcal{L}_j$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b_j$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -6 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (*5 Punkte*) Es sei A die reelle (3×3)–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\pi & 1 & \pi \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(b) Geben Sie alle Eigenwerte von A sowie deren geometrische und algebraische Vielfachheit an.

(c) Ist A diagonalisierbar?

(d) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des dazugehörigen Eigenraums.

Aufgabe 3 (*6 Punkte*) Es seien A_1, A_2 und A_3 die reellen (2×2)–Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A_1, A_2 und A_3 in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ linear unabhängig sind.

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Spalten ein linear unabhängiges System in $\mathbb{R}^4$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es seien $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Determinanten $\det(BC)$ und $\det(CB)$ sowie die Spur $\mathrm{Sp}(BC)$.

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Sei $a \neq 0$ und $f(x) = x\mathrm{e}^{ax}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(n)}(x) = (na^{n-1} + a^n x)\mathrm{e}^{ax}.$$

Aufgabe 5 (*7 Punkte*) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei g_α das Vektorfeld auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$g_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - \sin(\alpha)y^2 \\ xy \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Jacobi–Matrix, die Rotation und die Divergenz von g_α.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche g_α ein Potential besitzt.

(c) Geben Sie für $\alpha = -\frac{5}{6}\pi$ explizit ein Potential von g_α an.

Aufgabe 6 (*5 Punkte*)

(a) Entscheiden Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$, ob die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} z^n$ für z konvergiert oder divergiert.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Entwicklungspunkt der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(n^2)} (z - \mathrm{e} + \mathrm{i})^n.$$

Aufgabe 7 (*3 Punkte*) Die Kurve K sei parametrisiert durch $C\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$C(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass C eine reguläre Parametrisierung von K ist.

(b) Es sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld mit

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_K g(x) \bullet \mathrm{d}\, x$.

Aufgabe 8 (*5 Punkte*) Gegeben sei die Ebene

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an E.

(a) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform von E.

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem $\mathbb{F}$ an, bezüglich dem φ beschrieben wird durch ${}_{\mathbb{F}}\varphi_{\mathbb{F}}\colon {}_{\mathbb{F}}x \mapsto A\,{}_{\mathbb{F}}x$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Name, Vorname: | **Matrikel-Nummer:** | **Studiengang:**

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n-9} =$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^2+2x\sin(x^5)}{(2x-5)^2} =$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}+\frac{2^n}{n}} =$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{7^k} =$

Aufgabe 10 (*7 Punkte*) Gegeben seien die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\binom{x}{y} = \frac{1}{2}(x+y)^2$ und $g\binom{x}{y} = x^2+2xy+3y^2+x+3y$.

(a) Berechnen Sie die Gradienten ∇f und ∇g.

$$\nabla f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \qquad , \qquad \nabla g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \qquad .$$

(b) Geben Sie alle Punkte in $\mathbb{R}^2$ an, in denen ∇g verschwindet.

(c) Schreiben Sie die drei Gleichungen auf, die zur Bestimmung von kritischen Stellen von f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ nach der Methode von Lagrange benötigt werden.

.

(d) Geben Sie die kritischen Stellen $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ an, die zu Lösungen dieses Gleichungssystems gehören:

(e) Bestimmen Sie den größten Wert, den die Funktion f unter der Nebenbedingung $g\binom{x}{y} = 0$ annimmt:

Aufgabe 11 (*5 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Das Taylorpolynom zweiter Stufe von f am Entwicklungspunkt $\binom{2}{1}$ sei

$$\mathrm{T}_2\left(f, \tbinom{x}{y}, \tbinom{2}{1}\right) = 19 + 2(x-2) + 7(x-2)^2 - 4(x-2)(y-1).$$

(a) Geben Sie die Hessematrix von f im Punkt $\binom{2}{1}$ an. $\mathrm{H}f\binom{2}{1} = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{T}_1\left(f, \binom{x}{y}, \binom{2}{1}\right) = \boxed{}$.

(c) Geben Sie zwei verschiedene Funktionen $g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an mit

$$\mathrm{T}_1\left(g, \tbinom{x}{y}, \tbinom{2}{1}\right) = \mathrm{T}_1\left(h, \tbinom{x}{y}, \tbinom{2}{1}\right) = \mathrm{T}_1\left(f, \tbinom{x}{y}, \tbinom{2}{1}\right).$$

$g\binom{x}{y} = \boxed{}$,

$h\binom{x}{y} = \boxed{}$.

Aufgabe 12 (*5 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie $(-1+\mathrm{i})^6 = \boxed{}$.

(b) Bestimmen Sie $\left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = \boxed{}$.

(c) Es sei $z = \dfrac{3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-1+\mathrm{i}}$.

(i) Bestimmen Sie den Betrag $|z|$ sowie das Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ von z.

$|z| = \boxed{}$, $\varphi = \boxed{}$.

(ii) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von z^6.

$\mathrm{Re}(z^6) = \boxed{}$, $\mathrm{Im}(z^6) = \boxed{}$.
