Davide Veniani (Dozent)
Marius Nitzsche (Assistent)

Modulprüfung (Module 41990 und 107730)

17.09.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **8 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 5 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 ($2+1+1+1$ Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $\dfrac{n^5+\pi}{n^5+2\pi}$

(b) $\dfrac{5n+\cos(3n)}{n^2+\sin(n)}$

(c) $2\arctan(n^2)+n\ln\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)$

(d) $(-1)^{n(n+2)}$

Aufgabe 2 ($1+2+1+1$ Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Funktion, die vom Parameter $a\in\mathbb{R}$ abhängt:

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto\begin{cases} a\exp(ax) & \text{für } x\le 0,\\ \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{für } x>0.\end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f(\pi)$ und $f(0)$.

(b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\qquad\text{und}\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $a\in\mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.

(d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x\to+\infty$.

Aufgabe 3 ($1+1+2+1$ Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R},\quad x\longmapsto x^3-3x.$$

(a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(c) Untersuchen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g.

(d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g.

Aufgabe 4 ($1+2+1+1$ Punkte)**.** Eine Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K(x) = xe^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie die Grenzkostenfunktion.

(b) Ermitteln Sie die Wachstumsrate $WK(x)$ und die Elastizität $EK(x)$.

(c) Finden Sie die Stelle x, wo die Kosten proportional elastisch sind, sprich $|EK(x)| = 1$.

(d) Mittels der Elastizität bestimmen Sie ungefähr die Stelle, wo eine 1%-ige Erhöhung von x eine 2%-ige Senkung von $K(x)$ bewirkt.

Aufgabe 5 ($1+2+1+1$ Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f durch die Substitution $y = 1 + x^3$.

(c) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

(d) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Aufgabe 6 ($1+1+1+1+1$ Punkte)**.** Gegeben sei die Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A invertierbar ist.

(d) Ermitteln Sie den Rang der Matrix A für $a = 0$.

(e) Ermitteln Sie den Rang der Matrix A für $a = 1$.

Aufgabe 7 ($1+1+1+2$)**.** Eine Volkswirtschaft umfasst zwei Sektoren: Landwirtschaft (x_1) und Industrie (x_2). Die Produktionsmengen der Sektoren erfüllen die Gleichung:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{y},$$

wobei:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie den Rang von C.

(b) Berechnen Sie die Matrix $I - C$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

(c) Überprüfen Sie, ob die Hawkins-Simon-Bedingung erfüllt ist, d. h., ob alle Hauptminoren der Matrix $I - C$ positiv sind.

(d) Berechnen Sie den Produktionsvektor $\mathbf{x}$.

Aufgabe 8 ($1+1+1+2$ Punkte)**.** Gegeben sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - 2y + x^2, \qquad g(x,y) = x^2 + (y-2)^2 - 1.$$

(a) Bestimmen Sie, ob $f(1,2) < f(0,3)$ oder $f(1,2) > f(0,3)$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Nullstellenmenge von g beschränkt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen f und g.

(d) Finden Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.