Davide Veniani (Dozent)
Marius Nitzsche (Assistent)

Modulprüfung (Module 41990 und 107730) mit Lösungen

17.09.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es gibt insgesamt **8 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 5 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.

)

Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 1 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren oder divergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $\dfrac{n^5+\pi}{n^5+2\pi}$

(b) $\dfrac{5n+\cos(3n)}{n^2+\sin(n)}$

(c) $2\arctan(n^2)+n\ln\left(1+\dfrac{\pi}{n}\right)$

(d) $(-1)^{n(n+2)}$

Lösung. (2 Punkte für den ersten korrekt ausgerechneten Grenzwert. 1 Punkt für jeden weiteren korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Die Folge konvergiert und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+\pi}{n^5+2\pi} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\pi n^{-5}}{1+2\pi n^{-5}}\\ &= \frac{1}{1}=1.\end{aligned}$$

(b) Die Folge konvergiert und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5n+\cos(3n)}{n^2+\sin(n)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{\cos(3n)}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{n^2}}\\ &= \frac{0+0}{1+0}=0.\end{aligned}$$

(c) Zunächst gilt

$$\lim_{n\to\infty} 2\arctan(n^2) = 2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Außerdem gilt für jedes feste $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\tfrac{a}{n}\right)=a.$$

Mit $a=\pi$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\tfrac{\pi}{n}\right)=\pi.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\left(2\arctan(n^2)+n\ln\left(1+\tfrac{\pi}{n}\right)\right)=\pi+\pi=2\pi.$$

(d) Es gilt

$$n(n+2)=n^2+2n\equiv n \pmod 2.$$

Damit folgt

$$(-1)^{n(n+2)} = (-1)^n.$$

Die Folge nimmt also die Werte

$$(-1)^{2k} = 1 \quad \text{und} \quad (-1)^{2k+1} = -1$$

für gerade bzw. ungerade n an. Sie besitzt daher keinen eindeutigen Grenzwert und divergiert. $\square$

Aufgabe 2 $(1+2+1+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die folgende Funktion, die vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \begin{cases} a\exp(ax) & \text{für } x \leq 0, \\ \dfrac{\sin(3x)}{x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $f(\pi)$ und $f(0)$.

(b) Bestimmen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

(c) Bestimmen Sie den Wert von $a \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion f stetig ist.

(d) Ermitteln Sie die Asymptote der Funktion f für $x \to +\infty$.

Lösung. (a) (0,5 Punkte pro Funktionswert) Es gilt

$$f(\pi) = \frac{\sin(3\pi)}{\pi} = 0, \qquad f(0) = a\exp(a \cdot 0) = a \cdot 1 = a.$$

(b) (2 Punkte, falls alles richtig ist. Sonst 1 Punkt für die Erwähnung der Regel von de l'Hospital oder 1 Punkt für den korrekten Unterschied zwischen links- und rechtsseitigem Grenzwert) Für den linksseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ae^{ax} = a \cdot e^0 = a.$$

Auf der anderen Seite benutzen wir die Regel von de l'Hospital $(\frac{0}{0})$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3 \cdot \cos(3x)}{1} = 3.$$

(c) (1 Punkt für die korrekte Antwort. Sonst 0,5 Punkte für die korrekte Bedingung) Damit die Funktion f in 0 stetig ist, muss gelten

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Also

$$a = 3.$$

(d) (1 Punkt) Für $x \to +\infty$ betrachten wir

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}.$$

Da $|\sin(3x)| \leq 1$, folgt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(3x)}{x} = 0.$$

Somit besitzt f die waagrechte Asymptote

$$y = 0 \quad \text{für } x \to +\infty.$$

$\square$

Aufgabe 3 ($1 + 1 + 2 + 1$ Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 - 3x.$$

(a) Bestimmen Sie, ob g eine gerade oder ungerade Funktion ist.

(b) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von g.

(c) Untersuchen Sie die globalen Minimal- bzw. Maximalstellen von g.

(d) Ermitteln Sie alle Wendestellen von g.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Es gilt

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x).$$

Also ist g eine ungerade Funktion.

(Nur 0,5 Punkte, wenn die Bedingung $g(-x) = -g(x)$ nur an einer bestimmten Stelle überprüft wird, z. B. $x = 1$, und nicht für alle $x \in \mathbb{R}$.)

(b) (1 Punkt.) Wir haben

$$g'(x) = 3x^2 - 3, \qquad g''(x) = 6x.$$

(c) (2 Punkte.) Wir untersuchen die kritischen Punkte von g. Aus $g'(x) = 0$ erhalten wir

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1,\ 1.$$

Weiter gilt

$$g''(-1) = -6 < 0 \ \Rightarrow\ x = -1 \text{ ist lokale Maximalstelle,}$$

$$g''(1) = 6 > 0 \ \Rightarrow\ x = 1 \text{ ist lokale Minimalstelle.}$$

Funktionswerte:

$$g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2, \qquad g(1) = 1^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2.$$

Nun betrachten wir die Randpunkte:

$$g(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -8 + 6 = -2, \qquad g(2) = 8 - 6 = 2.$$

Zusammenfassung:

- Globale Maximalstellen: $x = -1$ und $x = 2$ mit Funktionswert 2.
- Globale Minimalstellen: $x = 1$ und $x = -2$ mit Funktionswert -2.

(Höchstens 0,5 Punkte wegen Rechenfehler abziehen. Wichtig ist, dass die Gleichung $g'(x) = 0$ richtig gestellt und gelöst wird und dass die Randpunkte berücksichtigt werden.)

(d) (1 Punkt.) Zur Bestimmung der Wendestellen lösen wir

$$g''(x) = 6x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Da

$$g'''(x) = 6 \neq 0,$$

ist $x = 0$ eine Wendestelle. Der Funktionswert ist

$$g(0) = 0.$$

Also liegt die Wendestelle bei $(0, 0)$. □

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 + 1 Punkte)**.** Eine Kostenfunktion ist gegeben durch

$$K(x) = xe^{-x}, \qquad x \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie die Grenzkostenfunktion.

(b) Ermitteln Sie die Wachstumsrate $WK(x)$ und die Elastizität $EK(x)$.

(c) Finden Sie die Stelle x, wo die Kosten proportional elastisch sind, sprich $|EK(x)| = 1$.

(d) Mittels der Elastizität bestimmen Sie ungefähr die Stelle, wo eine 1%-ige Erhöhung von x eine 2%-ige Senkung von $K(x)$ bewirkt.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung von $K(x)$:

$$K'(x) = \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\right) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

(b) (1 Punkt für die Wachstumsrate, 1 Punkt für die Elastizität.) Die Wachstumsrate ist definiert als

$$WK(x) = \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{(1-x)e^{-x}}{xe^{-x}} = \frac{1-x}{x}.$$

Die Elastizität ergibt sich zu

$$EK(x) = WK(x) \cdot x = \frac{1-x}{x} \cdot x = 1 - x.$$

(c) (1 Punkt.) Proportional elastisch bedeutet $|EK(x)| = 1$. Damit gilt

$$|1 - x| = 1.$$

Dies liefert zwei Lösungen:

$$1 - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \qquad 1 - x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Da $x \geq 0$ gilt, sind die relevanten Lösungen $x = 0$ (Randpunkt) und $x = 2$.

(d) (1 Punkt.) Wir suchen $x \geq 0$ mit $EK(x) = \frac{-2\%}{1\%} = \frac{-0{,}02}{0{,}01} = -2$. Also

$$1 - x = -2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3.$$

Somit tritt die verlangte Situation bei $x = 3$ auf. □

Aufgabe 5 $(1+2+1+1$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

(b) Berechnen Sie eine Stammfunktion von f durch die Substitution $y = 1 + x^3$.

(c) Berechnen Sie das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

(d) Berechnen Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Funktion f hat eine einzige Nullstelle $x = 0$.

(b) (2 Punkte.) Wir haben

$$\int \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + C = -\frac{1}{1+x^3} + C.$$

(c) (1 Punkt.) Es gilt

$$\int_0^1 \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

(d) (1 Punkt.) Es gilt

$$\int_0^\lambda \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x^3}\right]_0^\lambda = -\frac{1}{1+\lambda^3} + 1.$$

Damit haben wir

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to+\infty}\Big(-\frac{1}{1+\lambda^3} + 1\Big) = 1. \qquad \square$$

Aufgabe 6 ($1+1+1+1+1$ Punkte)**.** Gegeben sei die Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A in Abhängigkeit von a.

(c) Bestimmen Sie alle Werte von $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix A invertierbar ist.

(d) Ermitteln Sie den Rang der Matrix A für $a = 0$.

(e) Ermitteln Sie den Rang der Matrix A für $a = 1$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Matrix A ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ symmetrisch.

(b) (1 Punkt.) Wir entwickeln entlang der ersten Zeile:

$$\det A = 2\det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 2 \end{pmatrix} - a\det\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2(2-a^2) - a \cdot 2a = -4a^2 + 4.$$

(c) (1 Punkt.) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$, d.h. für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(d) (1 Punkt.) Für $a = 0$ ist $\det(A) \neq 0$ und damit ist der Rang von A gleich 3.

(e) (1 Punkt.) Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $a = 1$ ist $\det(A) = 0$ und damit ist der Rang von A kleiner als 3. Die erste und die zweite Spalte sind linear unabhängig. Damit ist der Rang gleich 2. □

Aufgabe 7 $(1+1+1+2)$**.** Eine Volkswirtschaft umfasst zwei Sektoren: Landwirtschaft (x_1) und Industrie (x_2). Die Produktionsmengen der Sektoren erfüllen die Gleichung:

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{y},$$

wobei:

$$C = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(a) Ermitteln Sie den Rang von C.

(b) Berechnen Sie die Matrix $I-C$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

(c) Überprüfen Sie, ob die Hawkins-Simon-Bedingung erfüllt ist, d. h., ob alle Hauptminoren der Matrix $I-C$ positiv sind.

(d) Berechnen Sie den Produktionsvektor $\mathbf{x}$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Es gilt

$$\det C = 0.5 \cdot 0.3 - 0.1 \cdot 0.3 \neq 0.$$

Damit hat C Rang 2.

(b) (1 Punkt.) Wir haben

$$I - C = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.3 \\ -0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

(c) (1 Punkt.) Die Hauptminore von $I-C$ sind 0.5 und

$$0.5 \cdot 0.7 - 0.1 \cdot 0.3 = 0.35 - 0.03 = 0.32.$$

Beide sind in der Tat positiv: Die Hawkins-Simon-Bedingung ist erfüllt.

(d) (2 Punkte.) Der Produktionsvektor $\mathbf{x}$ erfüllt $(I-C)\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Mit dem gaußschen Eliminationsverfahren erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.3 & 1 \\ -0.1 & 0.7 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 & 190 \\ 5 & -3 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & -190 \\ 0 & 32 & 960 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & -190 \\ 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 8 (1+1+1+2 Punkte)**.** Gegeben sind die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 - 2y + x^2, \qquad g(x,y) = x^2 + (y-2)^2 - 1.$$

(a) Bestimmen Sie, ob $f(1,2) < f(0,3)$ oder $f(1,2) > f(0,3)$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Nullstellenmenge von g beschränkt ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen f und g.

(d) Finden Sie das globale Minimum und das globale Maximum von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Es gilt

$$\begin{aligned} f(1,2) &= \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{2}2^2 - 2 \cdot 2 + 1^2 = -\frac{7}{3} = -\frac{14}{6} \\ f(0,3) &= \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{2}3^2 - 2 \cdot 3 + 0^2 = -\frac{3}{2} = -\frac{9}{6}. \end{aligned}$$

Damit ist $f(1,2) < f(0,3)$.

(b) (1 Punkt.) Die Nullstellenmenge von g ist ein Kreis mit Zentrum $(0,2)$ und Radius 1 und ist damit beschränkt.

(c) (1 Punkt.) Es gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ y^2 - y - 2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2(y-2) \end{pmatrix}$$

(d) (2 Punkte.) Wir führen den Lagrange-Multiplikator λ ein. Wir müssen folgendes System lösen:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ y^2 - y - 2 = 2\lambda(y-2) \\ x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$2x(\lambda - 1) = 0.$$

Erster Fall: $x = 0$. Einsetzen in die dritte Gleichug liefert $(y-2)^2 - 1 = 0$, spricht $y^2 - 4y + 3 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $y = 3$ und $y = 1$ Damit finden wir die Punkte $(0,3)$ und $(0,1)$.

Zweiter Fall: $\lambda = 1$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $y^2 - 3y + 2 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen $y = 1$ und $y = 2$. Für

$y = 1$ liefert die dritte Gleichung $x = 0$. Für $y = 2$ liefert die dritte Gleichung $x = 1$ oder $x = -1$. Damit finden wir die Punkte $(0, 1)$ (schon gefunden), $(1, 2)$ und $(-1, 2)$.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(0,3) &= -\frac{9}{6}, \\ f(1,2) &= -\frac{14}{6}, \\ f(-1,2) &= -\frac{14}{6} \\ f(0,1) &= -\frac{13}{6}. \end{aligned}$$

Das globale Minimum von f ist also $-\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$ und das globale Maximum ist $-\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$. □