Modulprüfung (Nr. 1077320000)
Mathematik 2 für Winfo, LA Inf, LA TP

10.09.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwüscht.
- Es gibt insgesamt **8 Aufgaben**.
- In jeder Aufgabe können bis zu 5 Punkten erreicht werden. Es sind insgesamt **40 Punkte** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Begründen Sie Ihre Entscheidung in jedem Fall. Berechnen Sie anschließend die Summe von *einer* der konvergenten Reihen.

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-5)^k}{4^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{5^{k+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{k+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k+1}$

Aufgabe 2. Gegeben sei die analytische Funktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k)!}.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion f um die Stelle $x_0 = 0$.

(b) Untersuchen Sie, ob die Funktion gerade, ungerade oder weder noch ist.

(c) Bestimmen Sie, ob die Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Extremum oder eine Wendestelle besitzt.

Aufgabe 3. Gegeben sei die Gruppe

$$G = \{\, \overline{n} \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \mid \mathrm{ggT}(n, 9) = 1 \,\},$$

wobei die Verknüpfung durch $\overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{nm}$ definiert ist.

(a) Ermitteln Sie die Anzahl der Elemente in G.

(b) Bestimmen Sie das neutrale Element der Gruppe G.

(c) Bestimmen Sie die Ordnung von $\overline{2}$ in G.

(d) Bestimmen Sie das Inverse von $\overline{2}$.

Aufgabe 4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

(b) Überprüfen Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist.

(c) Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, sodass gilt:

$$A = SDS^{-1}.$$

Aufgabe 5. Gegeben sei die folgende Übergangsmatrix einer Markow-Kette mit drei Zuständen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den entsprechenden Übergangsgraphen.

(b) Untersuchen Sie, ob die Markow-Kette irreduzibel bzw. aperiodisch ist.

(c) Finden Sie alle stationären Verteilungen.

(d) Untersuchen Sie, ob die Markow-Kette reversibel ist.

Aufgabe 6. Gegeben ist die folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$yy' = 1 + y^2.$$

(a) Untersuchen Sie, ob es sich bei der Gleichung um eine separierbare Differentialgleichung handelt. Wenn ja, geben Sie außerdem an, ob die Gleichung autonom ist.

(b) Lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem mit $y(0) = 2$.

(c) Bestimmen Sie, auf welchem Intervall der rellen Zahlen die Lösung definiert ist.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie für die folgende Lösungsmenge eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösungsraum genau dieser Menge entspricht:

$$\left\{ x^2e^{2x} + c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 8. Eine Glasmanufaktur stellt Flaschen und Vasen her. Jede Flasche und jede Vase wird einzeln verpackt. Aufgrund eines Lieferengpasses stehen pro Woche nur 16 Verpackungen zur Verfügung.

Für die Produktion wird Glas benötigt: Eine Flasche erfordert 1 kg, eine Vase 3 kg Glas. Insgesamt stehen der Manufaktur pro Woche 30 kg Glas zur Verfügung.

Zusätzlich wird jede Vase mit einer Silberplatte verziert. Aufgrund begrenzter Ressourcen können maximal 9 Vasen pro Woche hergestellt werden.

Der Verkaufspreis beträgt 200 Euro pro Flasche und 300 Euro pro Vase.

(a) Was ist der maximale wöchentliche Gewinn?

(b) Wie viele Flaschen und wie viele Vasen sollte die Manufaktur pro Woche herstellen, um den Gewinn zu maximieren?

(c) Werden unter diesen Bedingungen alle Verpackungen verbraucht?