Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP)

17.09.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit**: 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel**: Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworte müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Bitte schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{12n^6 - n^4}{3n^6 + n^5 + 2}$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \dfrac{6n^3 + \cos(n)}{n^3 + \sin(n)}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n(n+2)}$

(d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(4 + \dfrac{1}{n}\right)^2$

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^5) + 5}{x^4 + 3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^3)}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{12x^2 - 12}{x^2 + 4x - 5}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \cos(2\arctan(x))$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{5}{x+1} + \frac{x}{|x|}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -2$ bzw. $x = 3$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von g in 0.

(c) Ist die Funktion g stetig fortsetzbar in $x = 0$?

(d) Finden Sie die Asymptote von g für $x \to +\infty$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Der Sinus hyperbolicus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Berechnen Sie den Wert $\sinh(\ln(4))$ als rationale Zahl p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).

(b) Finden Sie alle Nullstellen des Sinus hyperbolicus.

(c) Berechnen Sie die erste Ableitung $\sinh'$ des Sinus hyperbolicus.

(d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sinus hyperbolicus.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = ax^2 + \sin(bx).$$

(a) Berechnen Sie f' und f''.

(b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = x + 7x^2.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big(x^7 + \sin(3x)\big)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{x+5}\, dx$

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Matrix A, die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.

(b) Berechnen Sie die Determinante von A.

(c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.

(d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = -1$.

Aufgabe 9 (6 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu dem reellen Eigenwert $\lambda = 3$ der Matrix C.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + 2xy^2 - 32x.$$

(a) Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(2, 0)$.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(d) Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal- bzw. Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 - (y - 2)^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Aufgabe 13 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 3y = 6.$$

(a) Schreiben Sie das entsprechende charakteristische Polynom P auf und finden Sie alle Nullstellen von P mit jeweiliger Vielfachheit.

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.

(c) Finden Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.

(d) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2, y'(0) = 0$.