

Modulprüfung (Modul 100051 mit 9 LP)
mit Lösungen
17.09.2025

Beachten Sie die folgenden Hinweise.

- **Bearbeitungszeit:** 180 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene DIN-A4-Seiten. Es ist erlaubt, die Seiten auf einem Tablet handschriftlich zu schreiben und sie dann auszudrucken. Insbesondere sind keine Taschenrechner oder Handys erlaubt.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- Es sind insgesamt **60 Punkte** in den **Aufgaben 1–13** erreichbar.
- Die Antworten müssen auf **eigenem Papier** geschrieben werden. Bitte schreiben Sie nicht auf den Umschlagsbogen.
- Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

(Bepunktung:

- Folgefehler werden berücksichtigt.
- Es dürfen halbe Punkte gegeben werden.
- In jeder Teilaufgabe werden alle entsprechenden Punkte nur dann vergeben, wenn alles richtig ist.

)

Aufgabe 1 (4 Punkte). Bestimmen Sie, ob die angegebenen Folgen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert.

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{12n^6 - n^4}{3n^6 + n^5 + 2}$ (c) $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^{n(n+2)}$
 (b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{6n^3 + \cos(n)}{n^3 + \sin(n)}$ (d) $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^2$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

- (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{12n^6 - n^4}{3n^6 + n^5 + 2} = \frac{n^6(12 - \frac{1}{n^2})}{n^6(3 + \frac{1}{n^1} + \frac{2}{n^6})} = \frac{12 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^1} + \frac{2}{n^6}}$$

Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{12}{3} = 4.$$

- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{6n^3 + \cos(n)}{n^3 + \sin(n)} = \frac{n^3(6 + \frac{\cos(n)}{n^3})}{n^3(1 + \frac{\sin(n)}{n^3})} = \frac{6 + \frac{\cos(n)}{n^3}}{1 + \frac{\sin(n)}{n^3}}.$$

Wegen des Sandwichsatzes gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^3} = 0$. Damit erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{6}{1} = 6.$$

- (c) Das Produkt $n(n+2)$ ist gerade für n gerade und ungerade für n ungerade. Deshalb gilt $c_n = 1$ für n gerade und $c_n = -1$ für n ungerade. Damit divergiert die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (d) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 + 0)^2 = 16. \quad \square$$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Im Fall einer Konvergenz berechnen Sie den Grenzwert.

(a)
$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n}}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n}$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!}$$

Lösung. (a) (1 Punkt) Die harmonische Reihe divergiert.

(b) (1 Punkt) Wir erkennen eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}.$$

(c) (2 Punkte) Wir erkennen eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n - \left(\frac{3}{8}\right)^0 = \frac{1}{1 - \frac{3}{8}} - 1 = \frac{3}{5}.$$

(d) (2 Punkte) Nach der Substitution $m = n + 2$ erkennen wir eine Exponentialreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!} = 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} = 2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) = 2e - 4. \quad \square$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen.

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^5) + 5}{x^4 + 3}$$

(c)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 12}{x^2 + 4x - 5}$$

(b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^3)}{x^3}$$

(d)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2 \arctan(x))$$

Lösung. (1 Punkt für jeden korrekt ausgerechneten Grenzwert. Falls der Grenzwert nicht stimmt: 0,5 Punkte für einen sinnvollen Schritt im Rechenweg, sonst 0 Punkte.)

(a) Da der Cosinus und die Funktion $x \mapsto x^5$ stetige Funktionen sind, gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^5) + 5}{x^4 + 3} = \frac{\cos(0^5) + 5}{0^4 + 3} = \frac{6}{3} = 2.$$

(b) Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x^3) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$. Daher können wir die Regel von de L'Hospital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 \cos(2x^3)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(2x^3) = 2 \cos(2 \cdot 0^3) = 2.$$

(c) Man kann die Regel von de L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 12}{x^2 + 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{24x}{2x + 4} = \frac{24 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 4} = 4.$$

(d) Es gilt $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \pi/2$. Daher haben wir

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(2 \arctan(x)) = \cos(\pi) = -1. \quad \square$$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Betrachten Sie die Funktion

$$g: \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{5}{x+1} + \frac{x}{|x|}.$$

- (a) Berechnen Sie den Wert dieser Funktion in $x = -2$ bzw. $x = 3$ als rationale Zahl p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.
- (b) Berechnen Sie den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von g in 0.
- (c) Ist die Funktion g stetig fortsetzbar in $x = 0$?
- (d) Finden Sie die Asymptote von g für $x \rightarrow +\infty$.

Lösung. (a) (0,5 Punkte pro Wert.) Wir berechnen

$$g(-2) = \frac{5}{(-2)+1} + \frac{-2}{|-2|} = \frac{5}{-1} - 1 = -6,$$
$$g(3) = \frac{5}{3+1} + \frac{3}{|3|} = \frac{5}{4} + 1 = \frac{9}{4}.$$

- (b) (0,5 Punkte pro Grenzwert.) Wir können Folgendes schreiben:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x+1} - 1 & \text{für } x < 0, \\ \frac{5}{x+1} + 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{x+1} - 1 = \frac{5}{0+1} - 1 = 4,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x+1} + 1 = \frac{5}{0+1} + 1 = 6.$$

- (c) (1 Punkt.) Nein, die Funktion g ist nicht stetig fortsetzbar in 0, denn die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte von g stimmen nicht in 0 überein.
- (d) (1 Punkt.) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x+1} + 1 = 1,$$

also besitzt g die Asymptote $y = 1$ für $x \rightarrow +\infty$. □

Aufgabe 5 (4 Punkte). Der Sinus hyperbolicus $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

- (a) Berechnen Sie den Wert $\sinh(\ln(4))$ als rationale Zahl p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$).
- (b) Finden Sie alle Nullstellen des Sinus hyperbolicus.
- (c) Berechnen Sie die erste Ableitung \sinh' des Sinus hyperbolicus.
- (d) Finden Sie alle kritischen Punkte des Sinus hyperbolicus.

Lösung. (a) (1 Punkt) Wir haben

$$\sinh(\ln(4)) = \frac{e^{\ln(4)} - e^{-\ln(4)}}{2} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}.$$

- (b) (1 Punkt) Der Sinus hyperbolicus besitzt eine Nullstelle im Ursprung:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0.$$

- (c) (1 Punkt) Wegen Linearität gilt

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- (d) (1 Punkt) Ein kritischer Punkt einer Funktion f ist ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$. Es gilt $\sinh'(x) = 0$ genau dann, wenn

$$e^x = -e^{-x}.$$

Dies ist jedoch für keine reelle Zahl erfüllt, da e^x immer positiv und $-e^{-x}$ immer negativ ist. Daher hat der Sinus hyperbolicus keine kritische Stelle. \square

Aufgabe 6 (4 Punkte). Betrachten Sie die von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ abhängige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = ax^2 + \sin(bx).$$

- (a) Berechnen Sie f' und f'' .
- (b) Ermitteln Sie das zweite Taylorpolynom T_2 von f um $x_0 = 0$.
- (c) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass T_2 gegeben ist durch

$$T_2(x) = x + 7x^2.$$

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \cos(bx), \\ f''(x) &= 2a - b^2 \sin(bx). \end{aligned}$$

- (b) (2 Punkte) Wir haben

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = b, \quad f''(0) = 2a.$$

Dementsprechend ist das zweite Taylorpolynom von f um $x_0 = 0$ gegeben durch

$$T_2(x) = 0 + bx + \frac{2a}{2!}x^2 = bx + ax^2.$$

- (c) (1 Punkt) Damit $T_2(x) = x + 7x^2$ muss $a = 7$ und $b = 1$ gelten. \square

Aufgabe 7 (4 Punkte). Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} (x^7 + \sin(3x)) dx \qquad (b) \int_{-1}^1 \frac{x}{x+5} dx$$

Lösung. (a) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral:

$$\int (x^7 + \sin(3x)) dx = \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{3}\cos(3x) + C$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^7 + \sin(3x)) dx = \left(\frac{1}{8}\pi^8 - \frac{1}{3}\cos(3\pi)\right) - \left(\frac{1}{8}(-\pi)^8 - \frac{1}{3}\cos(3(-\pi))\right) = 0.$$

Alternativ können wir bemerken, dass $x \mapsto x^7 + \sin(3x)$ eine ungerade Funktion ist, also gilt

$$\int_{-a}^a (x^7 + \sin(3x)) dx = 0.$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$.

(b) (2 Punkte für die volle Antwort. Sonst 1 Punkt für irgendeinen sinnvollen Schritt) Zuerst berechnen wir das unbestimmte Integral. Wir bemerken, dass der Integrand eine rationale Funktion ist. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{x}{x+5} = 1 - \frac{5}{x+5}.$$

Daher haben wir

$$\int \frac{x}{x+5} dx = \int \left(1 - \frac{5}{x+5}\right) dx = x - 5\ln(x+5) + C.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x}{x+5} dx &= \left(1 - 5\ln(1+5)\right) - \left((-1) - 5\ln(-1+5)\right) \\ &= 2 - 5\ln(6) + 5\ln(4). \end{aligned} \quad \square$$

Aufgabe 8 (4 Punkte). Betrachten Sie die folgende Matrix A , die von einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ abhängt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A symmetrisch ist.
- (b) Berechnen Sie die Determinante von A .
- (c) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix A vollen Rang hat.
- (d) Bestimmen Sie den Rang von A für $a = -1$.

Lösung. (a) **(1 Punkt.)** Damit die Matrix $A = (a_{ij})$ symmetrisch ist, muss $a_{21} = a_{12}$ sowie $a_{23} = a_{32}$ gelten, also $a = 0$. Tatsächlich ist die Matrix A symmetrisch für $a = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) **(1 Punkt für das korrekte Ergebnis. Sonst 0,5 Punkt für eine korrekte Anwendung der Definition von Determinante.)** Mit der Formel für die Determinante von $(3, 3)$ -Matrizen erhalten wir

$$\det(A) = a \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot a - a \cdot a \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot a \cdot a = a^2 - 1.$$

- (c) **(1 Punkt.)** Die Matrix A hat genau dann vollen Rang 3, wenn $\det(A) = a^2 - 1 \neq 0$, sprich für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- (d) **(1 Punkt.)** Wir setzen $a = 1$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(A) = 0$ wissen wir, dass $\text{rang}(A) < 3$. Die erste und zweite Spalte sind linear unabhängig, also ist $\text{rang}(A) = 2$. \square

Aufgabe 9 (6 Punkte). (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte folgender Matrix C :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum V_λ zu dem reellen Eigenwert $\lambda = 3$ der Matrix C .

Lösung. (a) (3 Punkte) Wir berechnen das charakteristische Polynom von C :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + 2(\lambda-2) \\ &= -(\lambda-2)((\lambda-1)(\lambda-2) - 2) \\ &= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda). \end{aligned}$$

Der linke Faktor wird zu Null für $\lambda = 2$, für den rechten Klammern wir erneut λ aus und erhalten $\lambda(\lambda-3)$. Damit ergeben sich als mögliche Lösungen 0 und 3.

Die drei Eigenwerte von C sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$.

(b) (3 Punkte) Wir berechnen den Eigenraum V_λ zu $\lambda = 3$. Dafür betrachten wir die Matrix $C - 3E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet:

$$C - 3E = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der Kern dieser Matrix besteht aus den Vektoren $(x_1, x_2, x_3)^T$ mit $x_1 = x_3$ und $x_2 = 2x_1 + x_3$. Also gilt

$$V = \ker(C - 3E) = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \quad \square$$

Aufgabe 10 (4 Punkte). Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem in 4 Variablen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_4 = 5. \end{cases}$$

- (a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des angegebenen linearen Gleichungssystems.

Lösung. (a) (1 Punkt.) Die Koeffizientenmatrix und der Vektor \mathbf{b} sind folgendermaßen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- (b) (3 Punkte für die volle Antwort. Sonst 0,5 für jeden sinnvollen Schritt (bis 2,5 Punkte). Pivots müssen nicht hervorgehoben werden.) Wir schreiben die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bringen sie anschließend in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 & \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 5 & \mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_1 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 & \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -10 & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & -10 & \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 5 & \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -4 & -10 & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -\frac{1}{5}\mathbf{z}_3 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{z}_1 - 2\mathbf{z}_3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & -2 & \mathbf{z}_2 + 4\mathbf{z}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & \end{array} \right) \end{aligned}$$

Aus der reduzierten Zeilenstufenform lesen wir Folgendes ab: Die Koordinaten x_1, x_2, x_4 sind Basiskoordinaten, die Koordinate x_3 ist frei. Deshalb schreiben wir $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$x_4 = 2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -2 + t.$$

Also besteht die Lösungsmenge aus allen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Aufgabe 11 (6 Punkte). Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^4 + 2xy^2 - 32x.$$

- Berechnen Sie den Wert von f an der Stelle $(2, 0)$.
- Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .
- Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f .
- Bestimmen Sie die Art aller kritischen Punkte von f (lokale Minimal- bzw. Maximalstelle oder Sattelpunkt).

Lösung. (a) (1 Punkt) Es gilt

$$f(2, 0) = 2^4 + 2 \cdot 2 \cdot 0^2 - 32 \cdot 2 = -48.$$

- (b) (2 Punkte) Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2y^2 - 32 \\ 4xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{H}f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4y \\ 4y & 4x \end{pmatrix}.$$

- (c) (2 Punkte) Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ heißt kritisch, falls $\nabla f(x, y) = 0$. Daher müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 4x^3 + 2y^2 - 32 &= 0, \\ 4xy &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = 0$. Setzen wir $y = 0$ in die erste Gleichung ein, so finden wir $4x^3 = 32$, also $x = 2$. Setzen wir $x = 0$ in die erste Gleichung ein, so finden wir $2y^2 = 32$, also $y = 4$ oder $y = -4$. Insgesamt finden wir also 3 kritische Punkte:

$$(2, 0), \quad (0, 4), \quad (0, -4).$$

- (d) (1 Punkt) An den drei kritischen Punkten ist die Hesse-Matrix von f jeweils gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{H}f(2, 0) &= \begin{pmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ \text{H}f(0, 4) &= \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{H}f(0, -4) &= \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher sind sowohl $(0, 4)$ als auch $(0, -4)$ Sattelpunkte, weil die entsprechenden Hesse-Matrizen indefinit sind. Außerdem ist $(2, 0)$ eine lokale Minimalstelle, weil die entsprechende Hesse-Matrix positiv definit ist. \square

Aufgabe 12 (4 Punkte). Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^2 - (y - 2)^2 - 1.$$

Finden Sie die globalen Minimal- und Maximalstellen von f unter der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Lösung. (1 Punkt) Wir berechnen die Gradienten von f und $g(x, y) = x^2 - (y - 2)^2 - 1$.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y + 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

(1 Punkt) Wir stellen die Lagrange-Bedingung auf:

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -2y + 4 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Aus der ersten Bedingung folgt $2x(\lambda - 1) = 0$, also müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $x = 0$ oder $\lambda = 1$.

(1 Punkt) Der Fall $x = 0$ liefert die zwei Punkte $(0, 1)$ und $(0, -1)$.

Aus $\lambda = 1$ folgt $y = 1$ aus der 2. Gleichung. Damit finden wir den Punkt $(0, 1)$, den wir schon gefunden haben.

(1 Punkt) Wir berechnen

$$f(0, 1) = -2, \quad f(0, -1) = -10.$$

Damit ist $(0, -1)$ die einzige globale Minimalstelle und $(0, 1)$ die einzige globale Maximalstelle, denn die Bedingung $g(x, y) = 0$ beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1, also eine beschränkte Teilmenge. \square

Aufgabe 13 (6 Punkte). Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 3y = 6.$$

- (a) Schreiben Sie das entsprechende charakteristische Polynom P auf und finden Sie alle Nullstellen von P mit jeweiliger Vielfachheit.
- (b) Ermitteln Sie alle Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung.
- (c) Finden Sie eine partikuläre Lösung der angegebenen Differentialgleichung.
- (d) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

Lösung. (a) (2 Punkte) Das charakteristische Polynom P ist gegeben durch

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Wir wenden die Mitternachtsformel an:

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1.$$

Das Polynom hat die Nullstellen $\lambda_1 = 1$ mit Vielfachheit 1 sowie $\lambda_2 = 3$ mit Vielfachheit 1.

- (b) (1 Punkt) Die Lösungen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung können aus P abgelesen werden:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- (c) (2 Punkte) Wir suchen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen führt sofort zu $c = 2$, also

$$y_p(x) = 2.$$

- (d) (1 Punkt) Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(x) = 2 + c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir berechnen die erste Ableitung:

$$y'(x) = c_1 e^x + 3c_2 e^{3x}.$$

Wir setzen die angegebenen Anfangsbedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$ ein und erhalten

$$2 + c_1 + c_2 = 2$$

$$c_1 + 3c_2 = 0.$$

Daraus folgt $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$. Dementsprechend ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$y(x) = 2. \quad \square$$