

Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausorraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **13.10.2025** im Campus-System bekanntgegeben.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (2+3+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' = (4x + 4)e^{-2x}.$$

- Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.
 - Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_p(x)$ von $y'' + 2y' = (4x + 4)e^{-2x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?
 - Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung $y'' + 2y' = (4x + 4)e^{-2x}$ mit den Anfangswerten $y(0) = 3$ und $y'(0) = -1$.
-

Aufgabe 2 (2+1+4+1 = 8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die gerade 2π -periodische Funktion, die für $0 \leq x \leq \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.
 - Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\text{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$ der Fourier-Reihe.
 - Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.
 - Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von $f(x)$ unter Verwendung von (c).
-

Aufgabe 3 (1+1+3+1 = 6 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + y = \cos(t) - \sin(t),$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

- Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(\cos(t) - \sin(t))$.
 - Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie \mathcal{L} auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an und setzen Sie den Anfangswert $f(0) = 2$ ein.
 - Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (b).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.
 - Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.
-

Aufgabe 4 (2+3+2+1 = 8 Punkte)

Wir betrachten den Kegel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2 - r \right\}.$$

Sei $J := \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$.

Die Oberfläche S von K wird in die Bodenfläche S_1 und die Mantelfläche S_2 zerlegt: $S = S_1 \cup S_2$.

Die Bodenfläche S_1 wird parametrisiert durch

$$\Phi_1 : J \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi_1(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

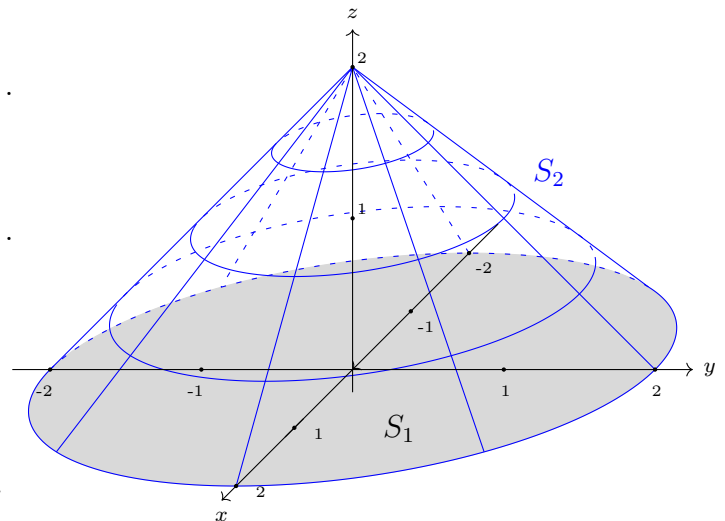
Die Mantelfläche S_2 wird parametrisiert durch

$$\Phi_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \Phi_2(r, \varphi) := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 2 - r \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $(\Phi_1)_r(r, \varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r, \varphi)$ und $(\Phi_2)_r(r, \varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r, \varphi)$ zeigen nach außen.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x, y, z) := \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z - 2 \end{pmatrix}.$$



- (a) Bestimmen Sie $(\Phi_1)_r(r, \varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r, \varphi)$ und $(\Phi_2)_r(r, \varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r, \varphi)$.
- (b) Berechnen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n \, dO$ als Flächenintegral.
- (c) Berechnen Sie $\iiint_K \operatorname{div}(g) \, dx \, dy \, dz$ als Gebietsintegral unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.
- (d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Aufgabe 5 (2+1+1+1= 5 Punkte)

Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} = u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{und} \quad u_t(x, 0) = -8x^3 e^{(-x^4)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems.
- (b) Überprüfen Sie: Es ist $u(0, t) = 0$ für $t \in \mathbb{R}$.
- (c) Überprüfen Sie: Es ist $u(x, t) = -u(x, -t)$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in [0, +\infty)$.
- (d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, t)$.

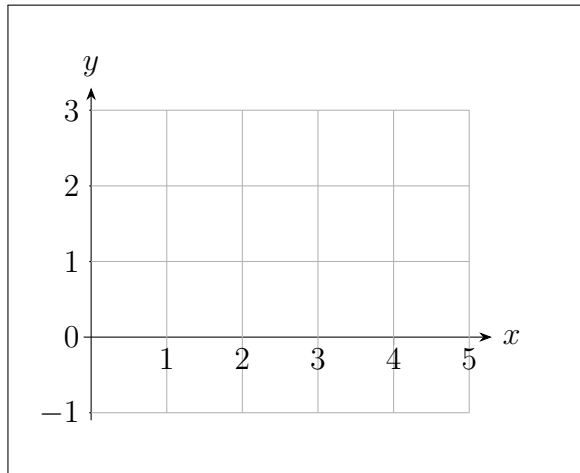
Name,
Vorname:

Matrikel-
nummer:

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$.

(a) Skizzieren Sie D .



(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y -Achse dar. Berechnen Sie $\iint_D 3 \, dx \, dy$.

$D =$

$\iint_D 3 \, dx \, dy =$

Aufgabe 7 (2+1 = 3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und die zugehörige Wronski-Matrix.

$W_{\text{sys}}(x) =$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$f(x) =$