Klausur zur Höheren Mathematik 3

für Ingenieurstudiengänge

Beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten.
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Vier eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift sind unerwünscht.
- In den **Aufgaben 1–5** sind vollständige Lösungswege anzugeben. Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist auf gesondertem Papier vorzunehmen.
- In den **Aufgaben 6–7** sind nur die fertiggerechneten Endergebnisse anzugeben. Diese sind in die vorgegebenen Kästen einzutragen. Nebenrechnungen sind hier nicht verlangt und werden bei der Bewertung nicht berücksichtigt.
- Es sind insgesamt 40 Punkte erreichbar.
- Die Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **13.10.2025** im Campus-System bekanntgegeben.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (2+3+2 = 7 Punkte)

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 2y' = (4x + 4)\mathrm{e}^{-2x} .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung $f_\mathrm{p}(x)$ von $y'' + 2y' = (4x + 4)\mathrm{e}^{-2x}$.
Liegt hierbei der Resonanzfall vor?

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung $y'' + 2y' = (4x + 4)\mathrm{e}^{-2x}$ mit den Anfangswerten $y(0) = 3$ und $y'(0) = -1$.

Lösung.

(a) Das charakteristische Polynom ist $p(X) = X^2 + 2X$.

Ausklammern von X ergibt $p(X) = X(X + 2)$. Damit erhalten wir die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$.

Das zugehörige Fundamentalsystem ist gegeben durch:

$$f_1(x) = \mathrm{e}^{0x} = 1\,, \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-2x} .$$

(b) Die rechte Seite der Gleichung hat die Form $r(x)\mathrm{e}^{\mu x}$, wobei $r(x) = 4x + 4$ ein Polynom von Grad 1 und $\mu = -2$ ist. Wir machen demnach einen Ansatz nach Art der rechten Seite.

Da $\mu = -2$ eine einfache Nullstelle von $p(X) = X(X+2)$ ist, befinden wir uns im Resonanzfall mit $m = 1$. Wir setzen daher an:

$$f_\mathrm{p}(x) = x(s_1 x + s_0)\mathrm{e}^{-2x} = (s_1 x^2 + s_0 x)\mathrm{e}^{-2x}$$

Wir werten das charakteristische Polynom in $\mathrm{D} + \mu$ aus, wobei D der Differentialoperator ist. Es gilt

$$p(X - 2) = (X - 2)(X - 2 + 2) = X^2 - 2X$$

und daher $p(\mathrm{D} - 2) = \mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D}$.

Nun wenden wir $p(\mathrm{D} - 2)$ auf den Polynomanteil $s_1 x^2 + s_0 x$ des Ansatzes an und setzen dies gleich mit dem Polynomanteil $4x + 4$ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} 4x + 4 &\overset{!}{=} p(\mathrm{D} - 2)(s_1 x^2 + s_0 x) \\ &= (\mathrm{D}^2 - 2\mathrm{D})(s_1 x^2 + s_0 x) \\ &= 2s_1 - 2(2s_1 x + s_0) \\ &= -4s_1 x + 2s_1 - 2s_0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $s_1 = -1$ und $s_0 = -3$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = (-x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-2x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung zur Bestimmung von s_0, s_1 aus dem Ansatz.

Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes $f_\mathrm{p}(x) = (s_1x^2 + s_0x)\mathrm{e}^{-2x}$ bis zur zweiten Ordnung:

$$
\begin{aligned}
f_\mathrm{p}'(x) &= (2s_1x + s_0)\mathrm{e}^{-2x} + (s_1x^2 + s_0x)\cdot(-2)\cdot\mathrm{e}^{-2x} \;=\; \left(-2s_1x^2 - 2s_0x + 2s_1x + s_0\right)\mathrm{e}^{-2x}\\
f_\mathrm{p}''(x) &= \left(-4s_1x - 2s_0 + 2s_1\right)\mathrm{e}^{-2x} + \left(-2s_1x^2 - 2s_0x + 2s_1x + s_0\right)\cdot(-2)\cdot\mathrm{e}^{-2x}\\
&= \left(4s_1x^2 + 4s_0x - 8s_1x - 4s_0 + 2s_1\right)\mathrm{e}^{-2x}.
\end{aligned}
$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein:

$$
\begin{aligned}
(4x+4)\mathrm{e}^{-2x} &= \left(4s_1x^2 + 4s_0x - 8s_1x - 4s_0 + 2s_1\right)\mathrm{e}^{-2x} + 2\cdot\left(-2s_1x^2 - 2s_0x + 2s_1x + s_0\right)\mathrm{e}^{-2x}\\
&= \left(-4s_1x - 2s_0 + 2s_1\right)\mathrm{e}^{-2x}
\end{aligned}
$$

Gelten soll also: $4 = -4s_1$, d.h. $s_1 = -1$, und $4 = -2s_0 + 2s_1 = -2s_0 - 2$, d.h. $s_0 = -3$.

Somit ist $f_\mathrm{p}(x) = (-x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-2x}$ eine partikuläre Lösung.

Alternative Lösung zu (b)*: Variation der Konstanten.*

Mit (a) erhalten wir die Wronski-Matrix

$$
\mathrm{W}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & -2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}
$$

und ihre Inverse

$$
\mathrm{W}(x)^{-1} = \frac{1}{1\cdot(-2\mathrm{e}^{-2x}) - 0}\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-2x} & -\mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.
$$

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $f_\mathrm{p}(x) = d_1(x)f_1(x) + d_2(x)f_2(x)$. Hierzu wird

$$
\begin{pmatrix} d_1'(x) \\ d_2'(x) \end{pmatrix} = \mathrm{W}(x)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ (4x+4)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ (4x+4)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x+2)\mathrm{e}^{-2x} \\ -2x-2 \end{pmatrix}.
$$

Es ist

$$
\int (2x+2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[(2x+2)\cdot(-\tfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-2x}\right] - \int 2\cdot(-\tfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[(-x-1)\cdot\mathrm{e}^{-2x} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right].
$$

Somit können wir Stammfunktionen $d_1(x) = (-x - \frac{3}{2})\mathrm{e}^{-2x}$ und $d_2(x) = -x^2 - 2x$ wählen.

Wir erhalten die partikuläre Lösung

$$
f_\mathrm{p}(x) \;=\; (-x - \tfrac{3}{2})\mathrm{e}^{-2x}\cdot 1 + (-x^2 - 2x)\mathrm{e}^{-2x} = (-x^2 - 3x - \tfrac{3}{2})\mathrm{e}^{-2x}.
$$

(c) Jede Lösung der Differentialgleichung ist von der Form

$$f(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{-2x} + (-x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitung ist

$$f'(x) = -2c_2\mathrm{e}^{-2x} + (-2x-3)\mathrm{e}^{-2x} + (-x^2-3x)(-2)\mathrm{e}^{-2x} = -2c_2\mathrm{e}^{-2x} + (-2x^2+4x-3)\mathrm{e}^{-2x}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$f(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 3$$
$$f'(0) = -2c_2 - 3 \stackrel{!}{=} -1$$

woraus $c_2 = -1$ und $c_1 = 4$ folgt. Damit ergibt sich die Lösung

$$f(x) = 4 - \mathrm{e}^{-2x} + (-x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-2x} = 4 - (x^2 + 3x + 1)\mathrm{e}^{-2x}\ .$$

Aufgabe 2 (2+1+4+1 = 8 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die gerade 2π-periodische Funktion, die für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gegeben ist durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \,. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x)$ für $-3\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$.

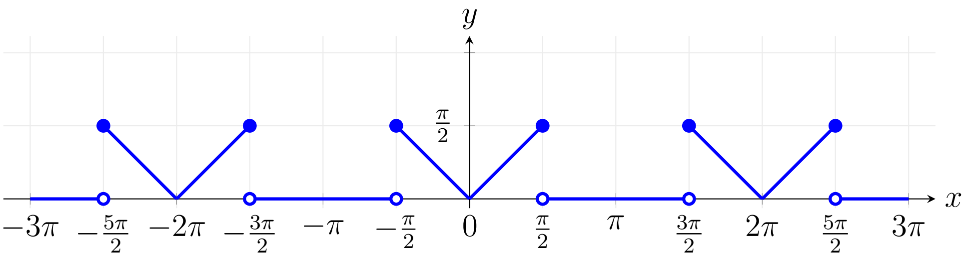
(b) Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\operatorname{Fourier}_f(\frac{\pi}{2})$ der Fourier-Reihe.

(c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f(x)$.

(d) Bestimmen Sie die komplexe Fourier-Reihe von $f(x)$ unter Verwendung von (c).

Lösung.

(a) Die Skizze ist in der Abbildung dargestellt.



(b) Es ist $\operatorname{Fourier}_f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)\right) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 0) = \frac{\pi}{4}$.

(c) Es ist $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da f gerade ist.

Es wird

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}\ . \end{aligned}$$

Für $n \geqslant 1$ wird

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\cdot\tfrac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\tfrac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2n}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \left[-\tfrac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \tfrac{2}{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2n}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{1}{n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{1}{n^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{n}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) + \tfrac{2}{\pi n^2}\cos\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{2}{\pi n^2}\ . \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe ergibt sich zu

$$\text{Fourier}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sin\Big(n\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{2}{\pi n^2} \cos\Big(n\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{2}{\pi n^2} \right) \cos(nx)\ .$$

(d) Die Koeffizienten c_k von $\text{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x)$ stehen mit den Koeffizienten a_k, b_k von $\text{Fourier}_f(x)$ in folgender Beziehung.

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - \mathrm{i} b_k}{2} = \frac{a_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + \mathrm{i} b_k}{2} = \frac{a_k}{2} \quad \text{für } k \geqslant 1.$$

Für $k \leqslant -1$ ist also

$$c_k = \frac{a_{-k}}{2} = \tfrac{1}{2} \Big(\tfrac{1}{(-k)} \sin\big((-k)\tfrac{\pi}{2}\big) + \tfrac{2}{\pi(-k)^2} \cos\big((-k)\tfrac{\pi}{2}\big) - \tfrac{2}{\pi(-k)^2} \Big) = \tfrac{1}{2k} \sin\big(k\tfrac{\pi}{2}\big) + \tfrac{1}{\pi k^2} \cos\big(k\tfrac{\pi}{2}\big) - \tfrac{1}{\pi k^2}\ .$$

Somit ist die komplexe Fourier-Reihe gegeben durch

$$\text{Fourier}_f^{\mathbb{C}}(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} \sin\Big(k\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{1}{\pi k^2} \cos\Big(k\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{1}{\pi k^2} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Aufgabe 3 (1+1+3+1 = 6 Punkte) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' + y \;=\; \cos(t) - \sin(t),$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$.

Sei $f(t)$ die zu bestimmende Lösung dieses Anfangswertproblems. Sei $F(s) := \mathcal{L}(f(t))$.

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}(\cos(t) - \sin(t))$.

(b) Setzen Sie $f(t)$ in die Differentialgleichung ein.
Wenden Sie $\mathcal{L}$ auf beide Seiten der entstandenen Gleichung an
und setzen Sie den Anfangswert $f(0) = 2$ ein.

(c) Bestimmen Sie $F(s)$ unter Verwendung von (b).
Wenden Sie Partialbruchzerlegung auf den entstandenen Ausdruck für $F(s)$ an.

(d) Bestimmen Sie $f(t)$ durch inverse Laplace-Transformation, angewandt auf $F(s)$.

Lösung.

(a) Es wird $\mathcal{L}\left(\cos(t) - \sin(t)\right) = \mathcal{L}\left(\cos(t)\right) - \mathcal{L}\left(\sin(t)\right) = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}$.

(b) Da $f(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, gilt

$$f'(t) + f(t) \;=\; \cos(t) - \sin(t)\ .$$

Da $f(t)$ auch die Anfangsbedingungen erfüllt, ist zudem $f(0) = 2$.

Laplace-Transformation auf beiden Seiten liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0) + F(s) &= \mathcal{L}\left(\cos(t) - \sin(t)\right) \\ &= \tfrac{s}{s^2+1} - \tfrac{1}{s^2+1}\ , \end{aligned}$$

nach Einsetzen des Anfangswerts $f(0) = 2$ also

$$sF(s) - 2 + F(s) \;=\; \frac{s-1}{s^2+1}\ .$$

(c) Es wird

$$\begin{aligned} F(s)(s+1) &= \tfrac{s-1}{s^2+1} + 2 \\ &= \tfrac{2s^2+s+1}{s^2+1} \\ F(s) &= \tfrac{2s^2+s+1}{(s^2+1)(s+1)} \end{aligned}$$

Ansetzen von Partialbruchzerlegung ergibt mit $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tfrac{2s^2+s+1}{(s^2+1)(s+1)} &= \tfrac{A}{s+1} + \tfrac{Bs+C}{s^2+1} \\ &= \tfrac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1)}{(s^2+1)(s+1)} \\ &= \tfrac{As^2+A+Bs^2+Bs+Cs+C}{(s^2+1)(s+1)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ B+C &= 1 \\ A+C &= 1\,. \end{aligned}$$

Also ist $B = A$. Somit ist $A = 1$. Folglich ist $C = 0$. Somit ist

$$F(s) = \frac{2s^2+s+1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Alternative Lösung: Partialbruchzerlegungs-Ansatz nur anwenden, wo nötig.

Es wird

$$\begin{aligned} F(s)(s+1) &= \tfrac{s-1}{s^2+1} + 2 \\ F(s) &= \tfrac{s-1}{(s^2+1)(s+1)} + \tfrac{2}{s+1} \end{aligned}$$

Ansetzen von Partialbruchzerlegung ergibt mit $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \tfrac{s-1}{(s^2+1)(s+1)} &= \tfrac{A}{s+1} + \tfrac{Bs+C}{s^2+1} \\ &= \tfrac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s+1)}{(s^2+1)(s+1)} \\ &= \tfrac{As^2+A+Bs^2+Bs+Cs+C}{(s^2+1)(s+1)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ B+C &= 1 \\ A+C &= -1\,. \end{aligned}$$

Also ist $B = -A$. Somit ist $-A + C = 1$ und $A + C = -1$. Addition der Gleichungen gibt $2C = 0$, also $C = 0$. Es folgt $A = -1$ und $B = 1$. Somit ist

$$\frac{s-1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} F(s) &= \tfrac{-1}{s+1} + \tfrac{s}{s^2+1} + \tfrac{2}{s+1} \\ &= \tfrac{1}{s+1} + \tfrac{s}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

(d) Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(s)) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{s}{s^2+1}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-t} + \cos(t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2+3+2+1 = 8 Punkte)

Wir betrachten den Kegel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant r \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant z \leqslant 2-r \right\}.$$

Sei $J := \left\{ \binom{r}{\varphi} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; r \in [0,2],\ \varphi \in [0,2\pi] \right\}$.

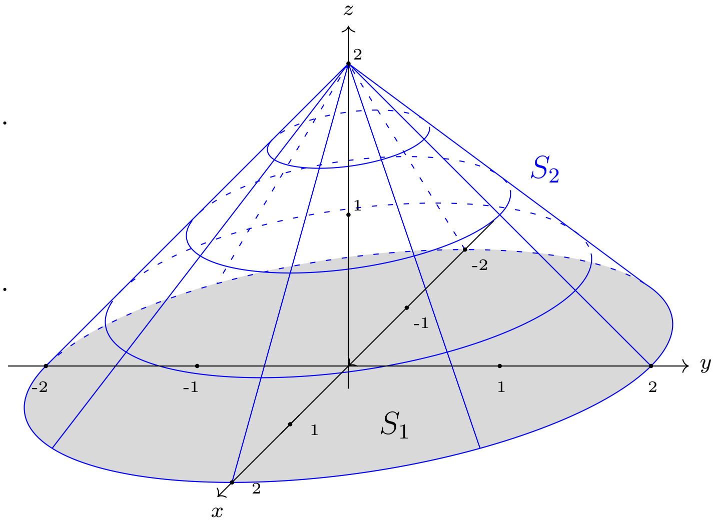
Die Oberfläche S von K wird in die Bodenfläche S_1 und die Mantelfläche S_2 zerlegt: $S = S_1 \cup S_2$.

Die Bodenfläche S_1 wird parametrisiert durch

$$\Phi_1 \;:\; J \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{r}{\varphi} \;\mapsto\; \Phi_1(r,\varphi) \;:=\; \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Mantelfläche S_2 wird parametrisiert durch

$$\Phi_2 \;:\; J \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \binom{r}{\varphi} \;\mapsto\; \Phi_2(r,\varphi) \;:=\; \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 2-r \end{pmatrix}.$$



Die Vektoren $(\Phi_1)_r(r,\varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r,\varphi)$ und $(\Phi_2)_r(r,\varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r,\varphi)$ zeigen nach außen.

Wir betrachten das Vektorfeld

$$g \;:\; \mathbb{R}^3 \;\to\; \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\mapsto\; g(x,y,z) \;:=\; \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z-2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $(\Phi_1)_r(r,\varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r,\varphi)$ und $(\Phi_2)_r(r,\varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r,\varphi)$.

(b) Berechnen Sie den Ausfluss $\iint_S g \bullet n \,\mathrm{d}O$ als Flächenintegral.

(c) Berechnen Sie $\iiint_K \operatorname{div}(g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ als Gebietsintegral unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (b) und (c) und verifizieren Sie so in diesem Fall den Satz von Gauß.

Lösung.

(a) Es wird

$$(\Phi_1)_r(r,\varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Es wird

$$(\Phi_2)_r(r,\varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen zunächst den Anteil des Ausflusses von g durch $\Phi_1(J) = S_1$. Es wird

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_{S_1} g \bullet n \, \mathrm{d}O &= \iint_J g(\Phi_1(r,\varphi)) \bullet ((\Phi_1)_r(r,\varphi) \times (\Phi_1)_\varphi(r,\varphi)) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 2r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[r^2\right]_{r=0}^{r=2} \\
&= 8\pi \; .
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun den Anteil des Ausflusses von g durch $\Phi_2(J) = S_2$. Es wird

$$\begin{aligned}
\textstyle\iint_{S_2} g \bullet n \, \mathrm{d}O &= \iint_J g(\Phi_2(r,\varphi)) \bullet ((\Phi_2)_r(r,\varphi) \times (\Phi_2)_\varphi(r,\varphi)) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \iint_J \begin{pmatrix} r\sin(\varphi) \\ -r\cos(\varphi) \\ -r \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 0 - r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[-\tfrac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2} = -\tfrac{16\pi}{3} \; .
\end{aligned}$$

Der Ausfluss für die gesamte Oberfläche S ergibt sich durch Addition der Anteile:

$$\mathrm{A}(g,S) = \iint_S g \bullet n \, \mathrm{d}O = \iint_{S_1} g \bullet n \, \mathrm{d}O + \iint_{S_2} g \bullet n \, \mathrm{d}O = 8\pi - \frac{16\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} \; .$$

(c) Die Divergenz von $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z-2 \end{pmatrix}$ ist

$$\mathrm{div}(g) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}(z-2) \;=\; 0+0+1 \;=\; 1 \; .$$

Wir berechnen das Gebietsintegral mit Hilfe von Zylinderkoordinaten.

$$\begin{aligned}
\iiint_K \mathrm{div}(g) \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \iiint_K 1 \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r} 1 \cdot r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (2-r)r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 2\pi \cdot (2r - r^2) \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[r^2 - \tfrac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=2} \\
&= 2\pi(4 - \tfrac{8}{3}) = \tfrac{8\pi}{3} \; .
\end{aligned}$$

(d) Wir erhalten

$$\mathrm{A}(g,S) \overset{\text{(b)}}{=} \frac{8\pi}{3} \overset{\text{(c)}}{=} \iiint_K \operatorname{div}(g)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ .$$

Dies bestätigt den Satz von Gauß im vorliegenden Fall.

Aufgabe 5 (2+1+1+1= 5 Punkte)

Wir betrachten die Wellengleichung

$$u_{tt} \;=\; u_{xx}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$u(x,0)=0 \quad \text{und} \quad u_t(x,0)=-8x^3\mathrm{e}^{(-x^4)} \qquad \text{für } x\in\mathbb{R}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Anfangswertproblems.

(b) Überprüfen Sie: Es ist $u(0,t)=0$ für $t\in\mathbb{R}$.

(c) Überprüfen Sie: Es ist $u(x,t)=-u(x,-t)$ für $t\in\mathbb{R}$ und $x\in[0,+\infty)$.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,t)$.

Lösung.

(a) Unter Verwendung der d'Alembertschen Formel mit $f(x)=0$, $g(x)=-8x^3\mathrm{e}^{(-x^4)}$ und $c=1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s\\
&= 0+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -8s^3\mathrm{e}^{(-s^4)}\,\mathrm{d}s\\
&= \int_{x-t}^{x+t} \mathrm{e}^{(-s^4)}(-4s^3)\,\mathrm{d}s\\
&\overset{v=-s^4}{=} \int_{-(x-t)^4}^{-(x+t)^4} \mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v\\
&= \Big[\mathrm{e}^v\Big]_{-(x-t)^4}^{-(x+t)^4}\\
&= \mathrm{e}^{(-(x+t)^4)}-\mathrm{e}^{(-(x-t)^4)}\,.
\end{aligned}$$

(b) Einsetzen von $x=0$ in die Lösung aus (a) gibt

$$u(0,t)=\mathrm{e}^{(-(0+t)^4)}-\mathrm{e}^{(-(0-t)^4)}=\mathrm{e}^{(-t^4)}-\mathrm{e}^{(-t^4)}=0\,.$$

(c) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
-u(x,-t) &= -(\mathrm{e}^{(-(x+(-t))^4)}-\mathrm{e}^{(-(x-(-t))^4)})\\
&= -\mathrm{e}^{(-(x-t)^4)}+\mathrm{e}^{(-(x+t)^4)}\\
&= u(x,t)
\end{aligned}$$

(d) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} u(t,t) &= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(-(t+t)^4)}-\mathrm{e}^{(-(t-t)^4)}\\
&= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(-(2t)^4)}-\mathrm{e}^0\\
&= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{(-16t^4)}-1\\
&= -1\,.
\end{aligned}$$

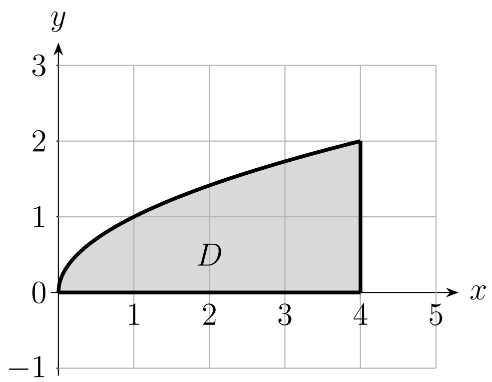
Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (1+2 = 3 Punkte)

Sei $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x} \right\}$.

(a) Skizzieren Sie D.



(b) Stellen Sie D als Normalbereich bezüglich der y-Achse dar. Berechnen Sie $\iint_D 3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leqslant y \leqslant 2,\ y^2 \leqslant x \leqslant 4 \right\}$$

$$\iint_D 3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 16$$

Aufgabe 7 (2+1 = 3 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$.

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und die zugehörige Wronski-Matrix.

$$f_{[1]}(x) = \mathrm{e}^{5x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix},\ f_{[2]}(x) = \mathrm{e}^{-5x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{W}_{\mathrm{sys}}(x) = \begin{pmatrix} 5\mathrm{e}^{5x} & 0 \\ \mathrm{e}^{5x} & \mathrm{e}^{-5x} \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{5x} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\mathrm{e}^{-5x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$