

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Studiengang:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/14	/8	/8	/7	/12	/14	/76

Note:

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

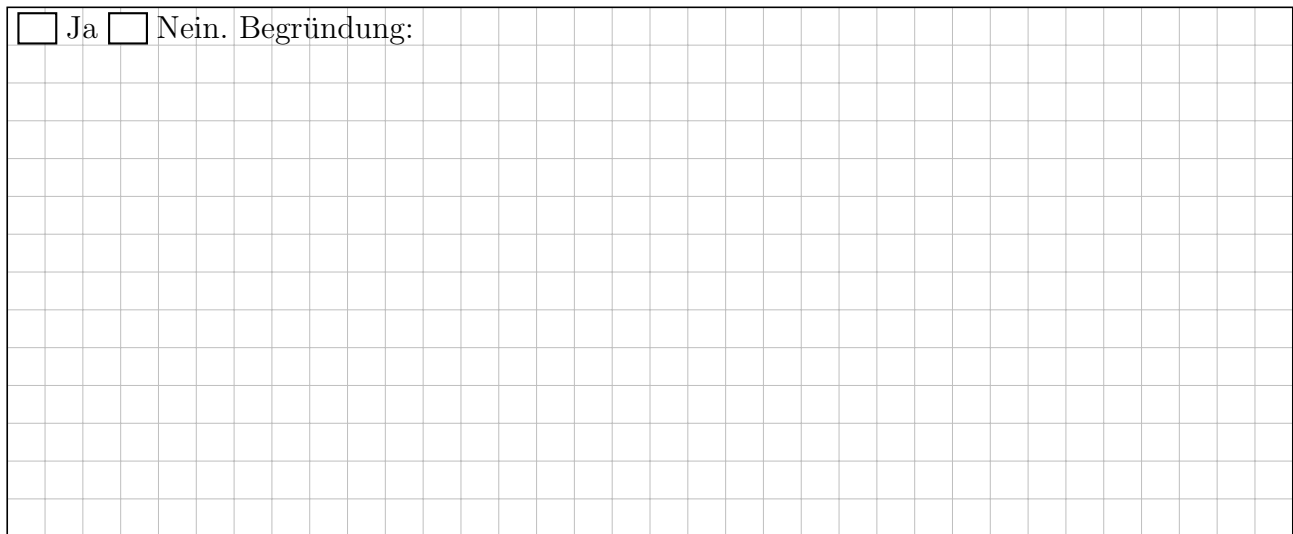
Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

2D. Seien $(f_k : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R})_{k \in \mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in [0, 3]$. Gilt dann für die Integrale ebenso der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^3 f_k(x) dx = 0$?

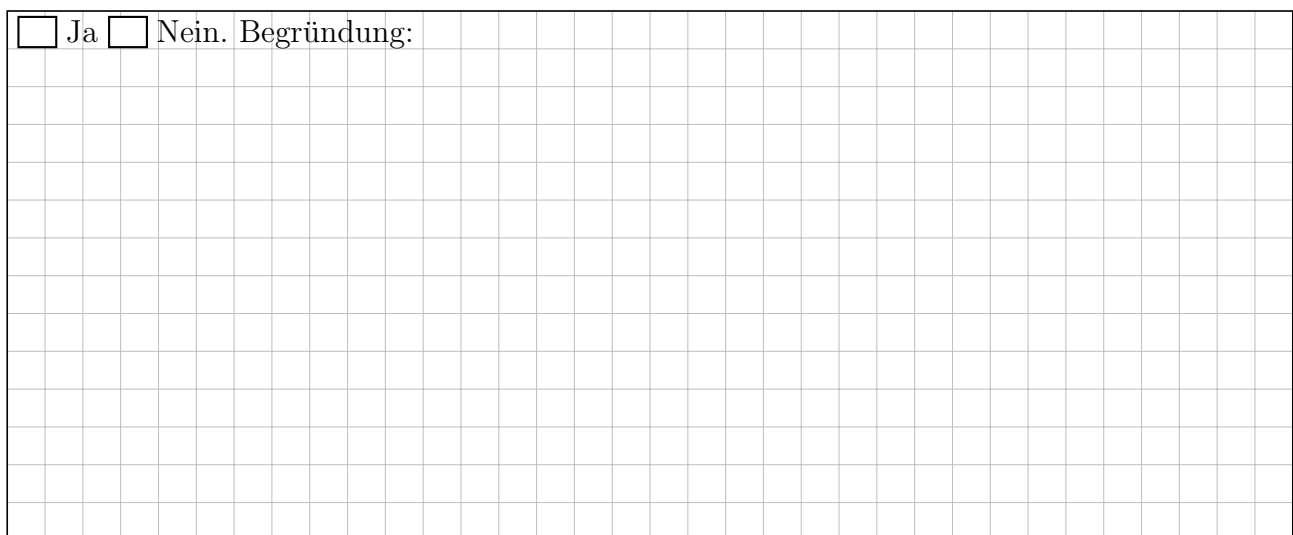
Ja Nein. Begründung:



2

2E. Wir untersuchen stetig differenzierbare Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 2 \cdot \sqrt{|y(t)|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Können sich zwei solche Lösungen u, v kreuzen, von $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$?

Ja Nein. Begründung:

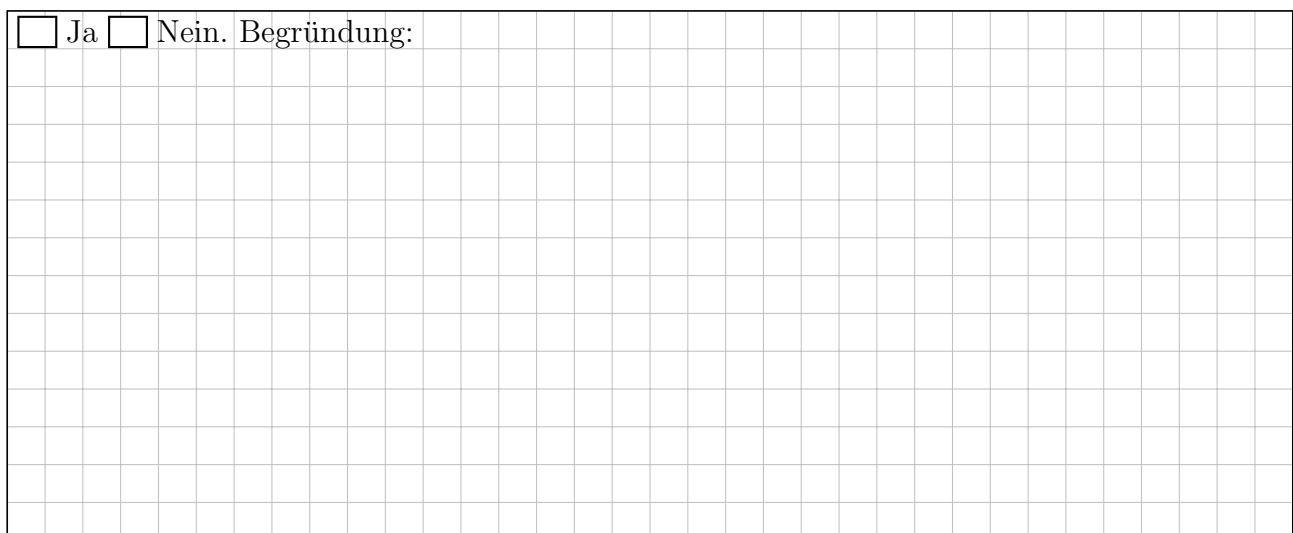


2

2F. Ist jede Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 1 - \cos(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?

Hinweis: Hilfreich sind hier die vielen konstanten Lösungen.

Ja Nein. Begründung:



2

Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (14 Punkte)

Wir betrachten das Integral $I := \int_{y=0}^2 \int_{x=y^2}^4 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx dy$.

3A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der x - y -Ebene:



Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y -Richtung:

$\leq x \leq$, $\leq y \leq$

3

3B. Berechnen Sie das Integral I :

$I =$

2

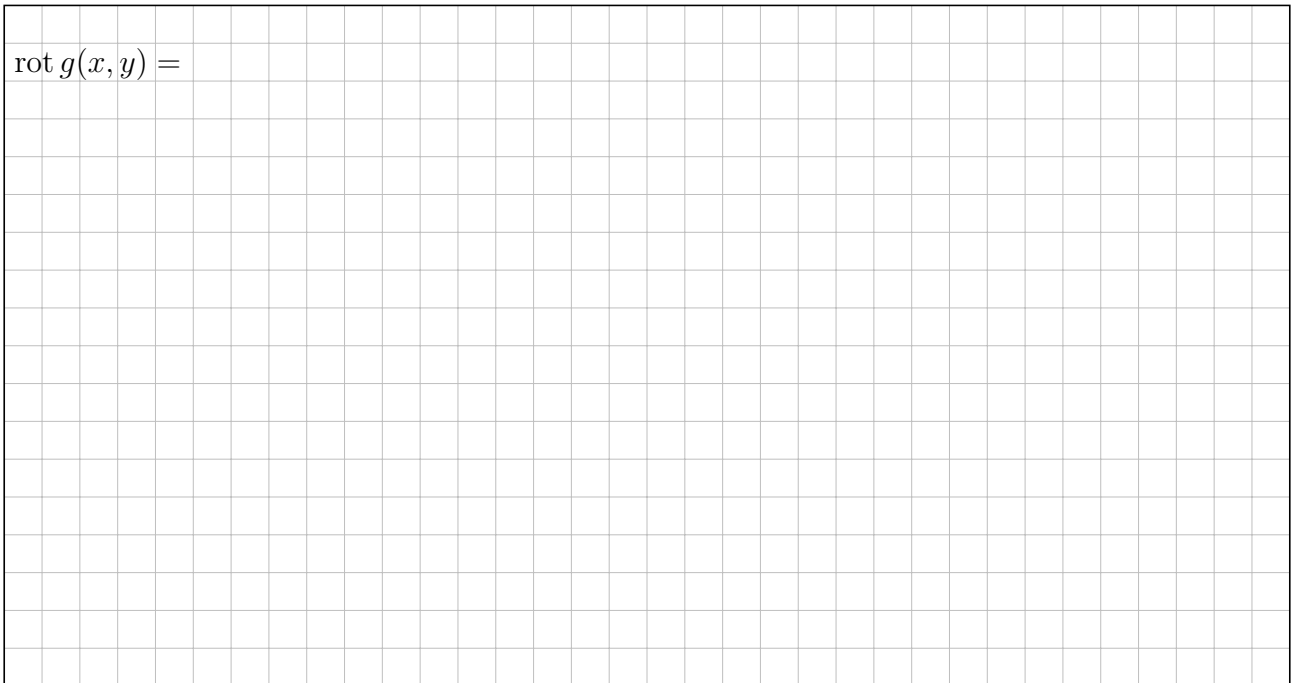
Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld mit $\operatorname{rot} f = 0$, aber $\int_{\partial B(0,1)} f(s) \cdot ds = 1$.

Aus f und $a \in \mathbb{R}$ konstruieren wir das Dipolfeld $g: \mathbb{R}^2 \setminus \{(\mp 1, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 2f \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} - a f \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}.$$

3C. Bestimmen Sie zu g die Rotation:

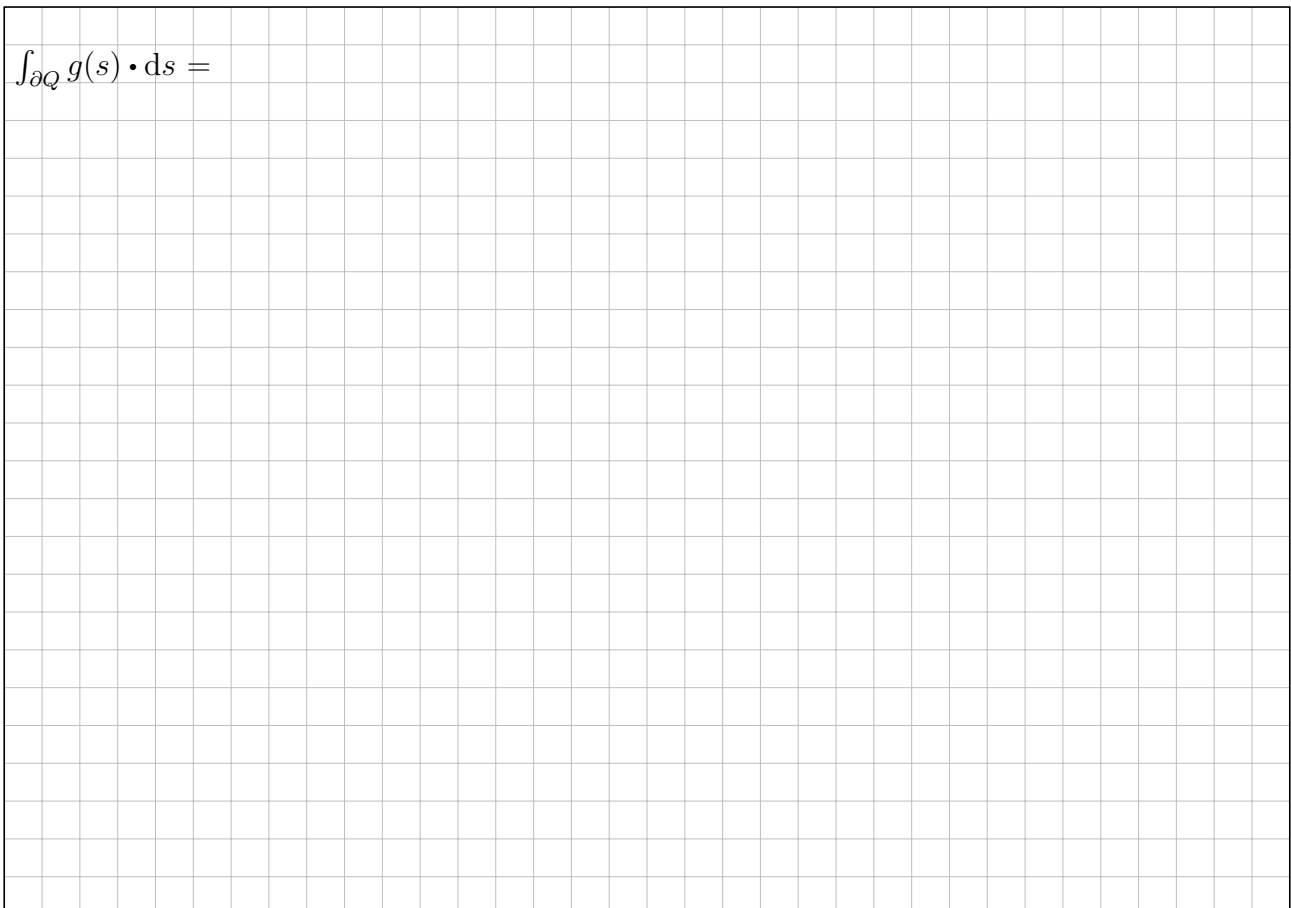
rot $g(x, y) =$



2

3D. Bestimmen Sie $\int_{\partial Q} g(s) \cdot ds$ entlang dem Rand des Quadrats $Q = [-3, 3]^2$.

$\int_{\partial Q} g(s) \cdot ds =$



2

3E. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erlaubt g ein Potential auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 1] \times \{0\})$?

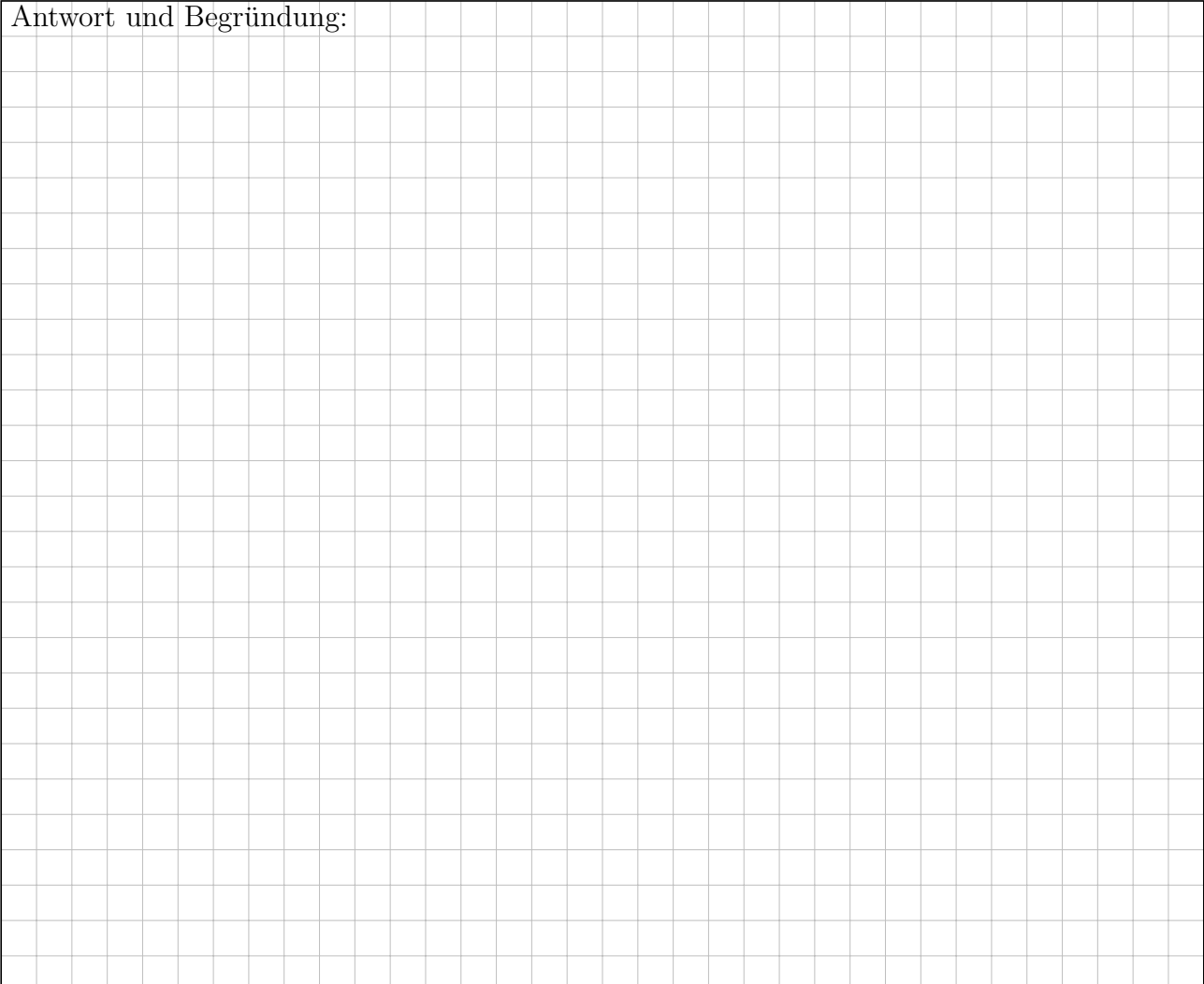
Antwort und Begründung:



2

3F. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erlaubt g ein Potential auf $W := \mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1] \times \{0\})$?

Antwort und Begründung:



3

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (8 Punkte)

Sei $\alpha: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Hierzu betrachten wir das radiale Vektorfeld $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v) = \alpha(|v|)v, \quad \text{ausführlich} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \alpha(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4A. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über die Sphäre $S_r = \partial B(0, r)$ nach außen.

Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Sphäre.

$$\int_{S_r} f(s) \cdot dS =$$

2

Wir wählen nun speziell $\alpha(r) = 1/(4\pi r^3)$ und erhalten das Newton-Feld

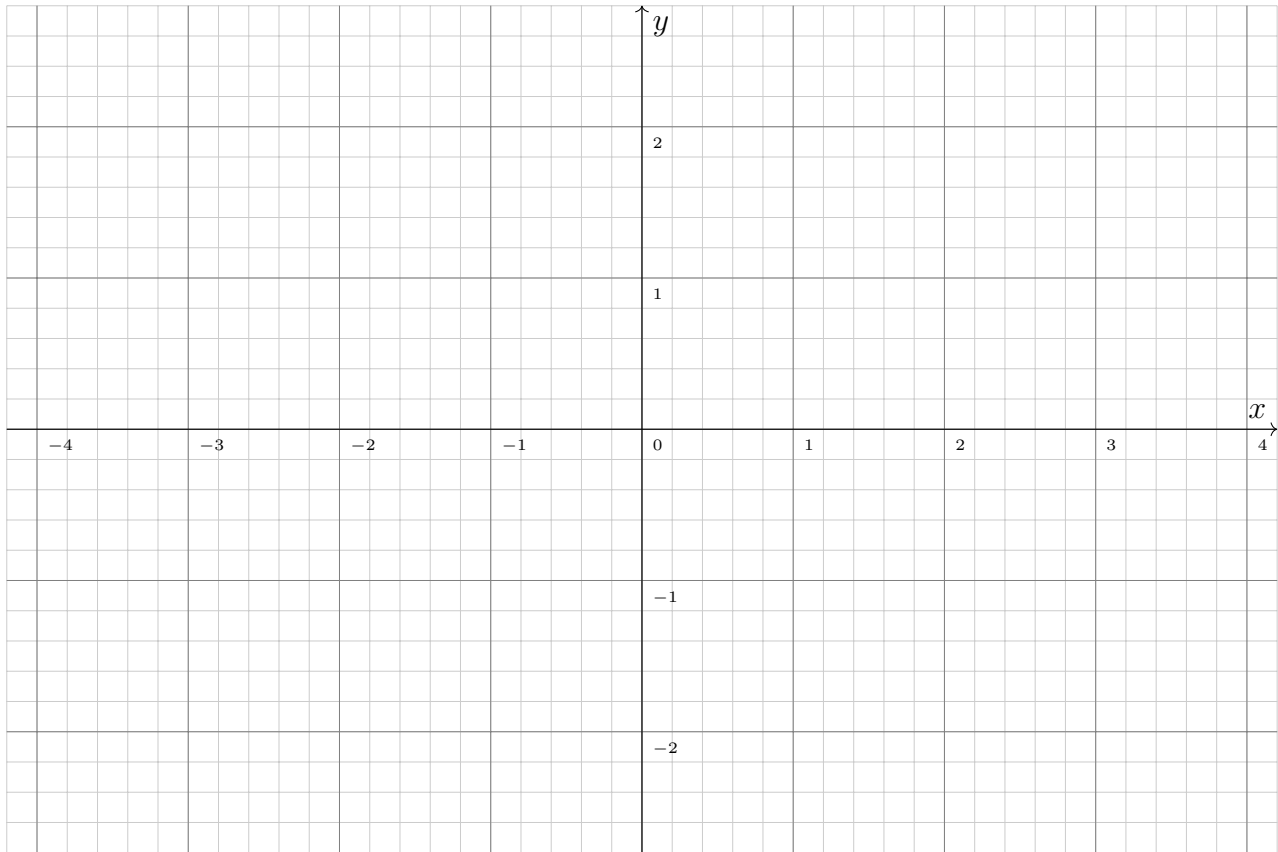
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \frac{1}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad \text{In diesem Falle gilt } \operatorname{div} f = 0 \text{ und } \int_{S_r} f(s) \cdot dS \text{ hängt nicht von } r \text{ ab.}$$

Zu den Massen $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Gravitationsfeld

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := a f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b f \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir suchen seinen Fluss aus dem Körper $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/9 + y^2/4 + z^2 \leq 1\}$.

4B. Skizzieren Sie in der x - y -Ebene die Schnittmenge mit K sowie die zwei Polstellen von g .

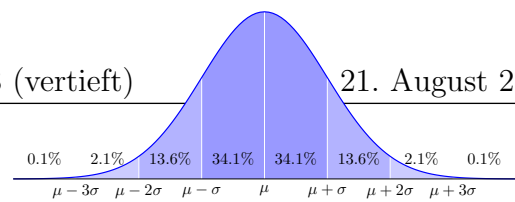


3

4C. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes g über den Rand ∂K nach außen.

$$\int_{\partial K} g(s) \cdot dS =$$

3



Aufgabe 7. Wahrscheinlichkeit (12 Punkte)

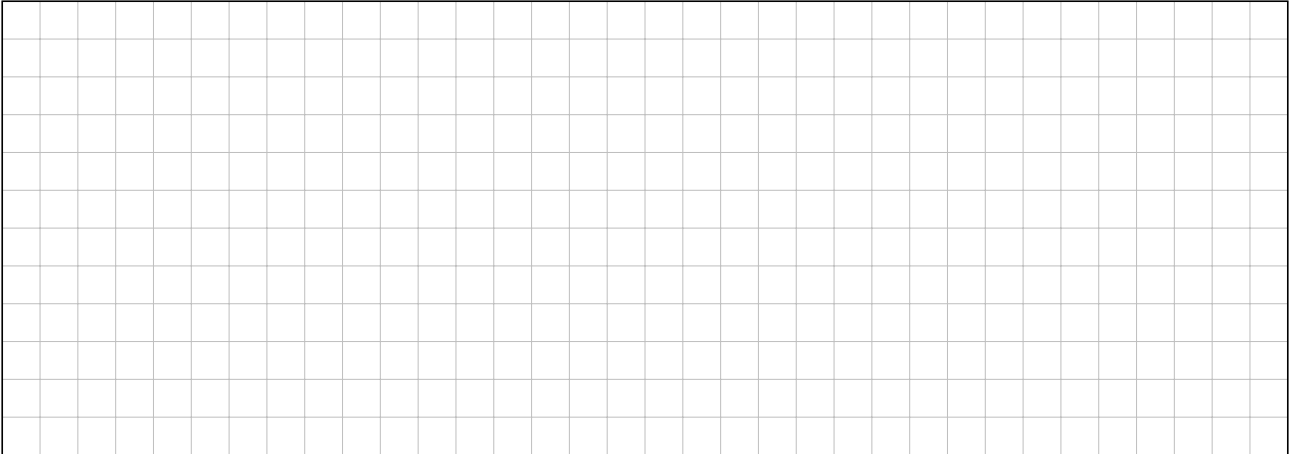
7A. Sie wiederholen 480 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 25%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 120 420 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

3

7B. Sie wiederholen 10 000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.98% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 9 998 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

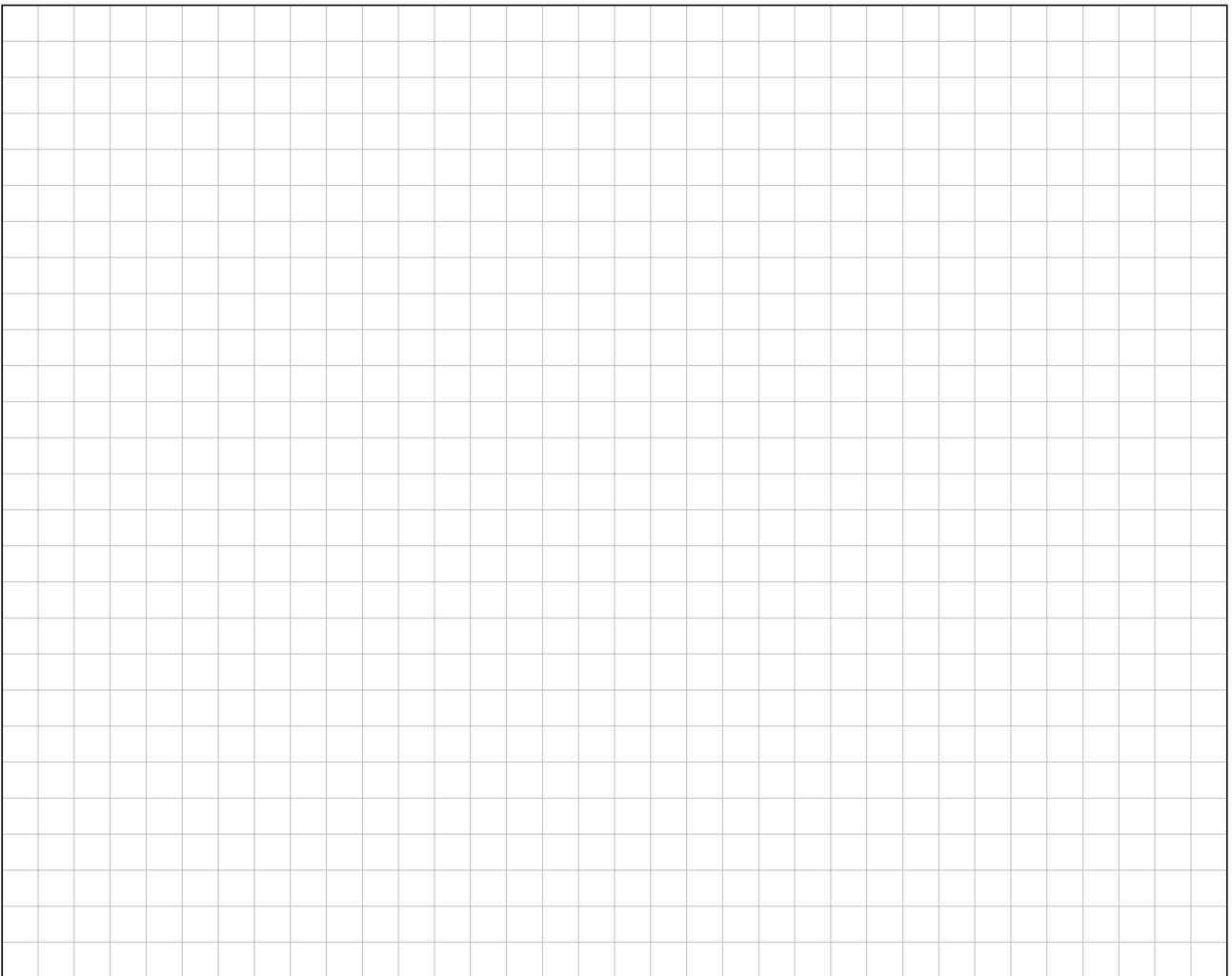
3

7C. Sie würfeln viermal mit einem fairen, zehnsseitigen Würfel (kurz „D10“). Mit welcher Wkt r sind unter den vier Ergebnissen mindestens zwei gleiche? (Antwort als gekürzter Bruch)



2

7D. Von 73 äußerlich gleichen, sechsseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt nie die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln n mal unabhängig. Wenn keiner der n Würfe eine 6 ergibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n ist Ihr Würfel der gezinkte? Berechnen Sie allgemein w_n und speziell den Wert w_2 (Letzteren als gekürzten Bruch).

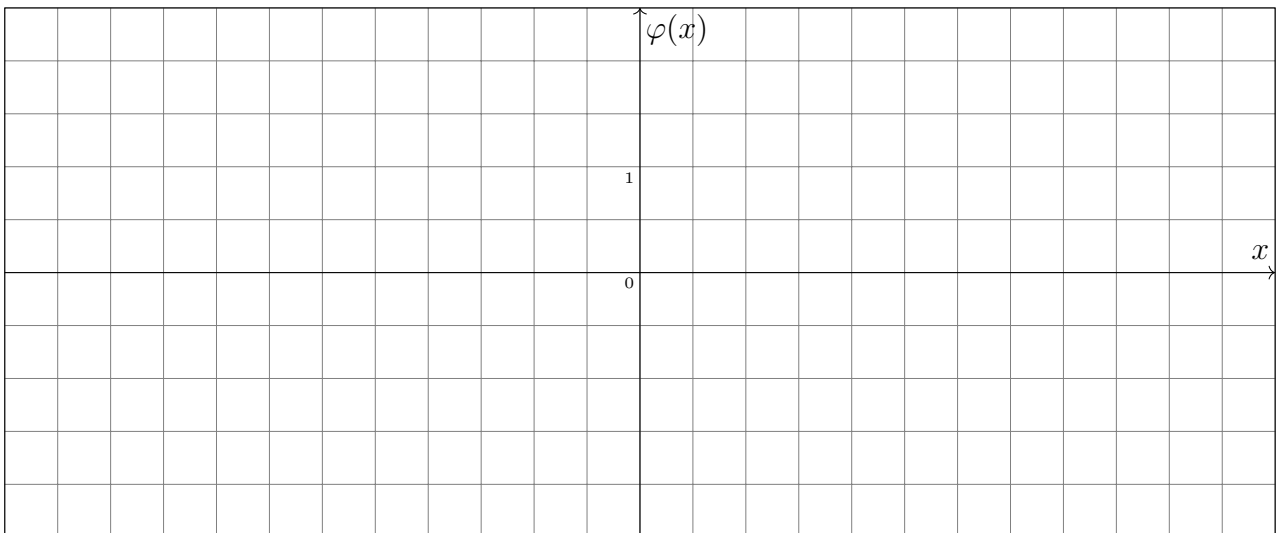
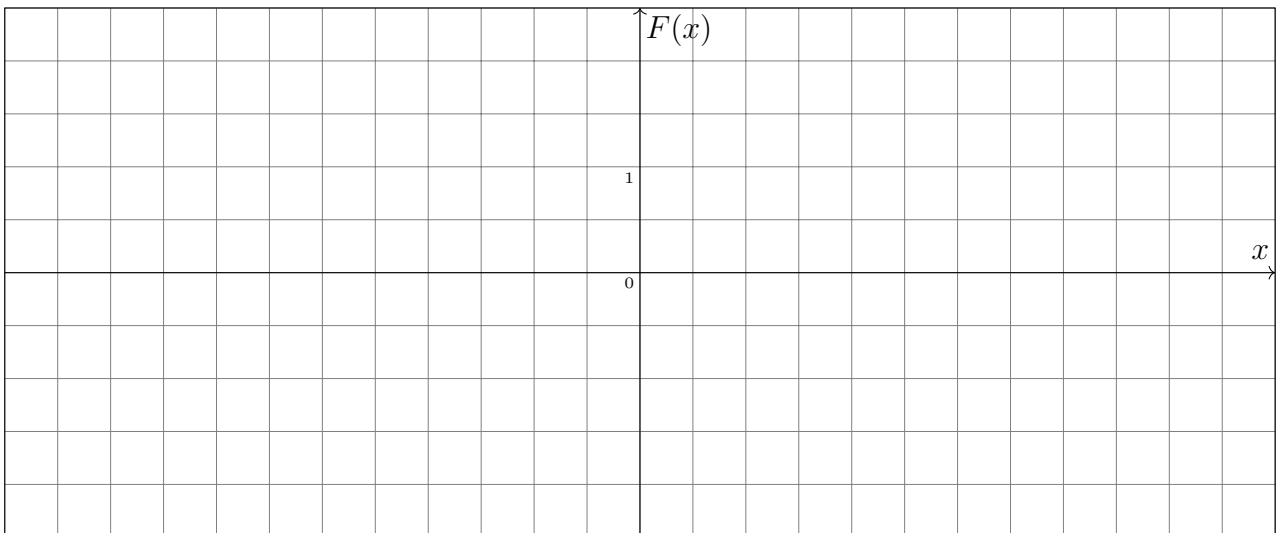
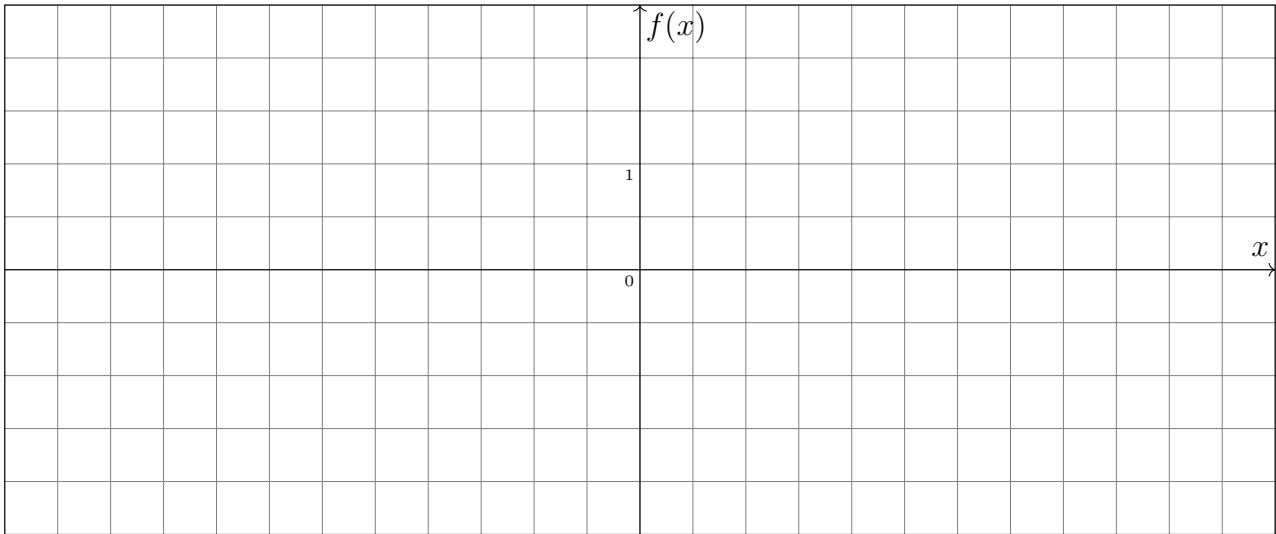


Konkrete Zahlenwerte: $w_0 = \frac{1}{73}$, $w_1 = \frac{1}{61}$, $w_2 = \boxed{}$, $w_3 = \frac{3}{128}$

4

Aufgabe 8. *Fourier-Reihen* (14 Punkte)

8A. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade 2π -periodisch mit $f(x) = -\cos(x)$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie f sowie die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$ und die Ableitung $\varphi = f'$ auf $[-12, 12]$.



8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$.

Hinweis: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(s) \cos(t) = \frac{1}{2}[\sin(s+t) + \sin(s-t)]$.

$b_k =$



8C. Bestimmen Sie zur Ableitung φ die Fourier-Reihe $\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)$.

Für $k \geq 1$ gilt:

$\alpha_k =$

$\alpha_0 =$

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4\ell^2}{(4\ell^2 - 1)^2} \in [0.61, 0.62]$.
Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

3

3