Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschriebene Notizen
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/12	/14	/8	/8	/7	/12	/14	/76

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen! Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Semester richtig nutzen? Zur Ergänzung sind alte Klausuren wunderbar. Gerne geschehen! Als Lernersatz oder vermeintliche Abkürzung verleiten sie auf den Holzweg. Das können Sie besser! Mit hektischem Hauruck vor der Klausur machen Sie sich das Lernen unnötig schwer. Erst ignorieren, dann spekulieren, schließlich lamentieren? Besser gut betreut und richtig studieren!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegen/Beispiels).

2A. Wir suchen die Lösungen $(u, v) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Differentialgleichungssystems $u''' = u' + v$ und $v'' = v' - u$. Existieren hierzu sechs linear unabhängige Lösungen?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Die Menge *aller* Lösungen ist ein Vektorraum der Dimension $3 + 2 = 5$.

Erläuterung: Wir schreiben unser DGSystem äquivalent als DGSystem erster Ordnung:

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ v \\ v' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Darauf können wir nun wunderbar den Struktursatz für lineare Differentialgleichungssysteme anwenden: Die Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 5. Darin ist jede Familie von 6 Elementen (hier: Lösungsfunktionen) demnach linear abhängig. Bei jeder konkreten Rechnung wissen wir so, wie viele Lösungen wir suchen, und wann wir alle gefunden haben!

$\overline{2}$

2B. Ist die Differentialgleichung $\sin(xy) + \cos(xy)\, y' = 0$ exakt?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Mit $f(x, y) = \sin(xy)$ und $g(x, y) = \cos(xy)$ finden wir
$\partial_y f(x, y) = \cos(xy)\, x$ und $\partial_x g(x, y) = -\sin(xy)\, y$,
also $\operatorname{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f \neq 0$.

Erläuterung: Zur Lösung von Differentialgleichungen der Form $f(x, y) + g(x, y)\, y' = 0$ wollen wir ein Potential Φ konstruieren, das $\operatorname{grad} \Phi = (f, g)$ erfüllt. Das ist hier leider nicht möglich. Gut zu wissen. Als nächstes könnten wir einen integrierenden Faktor suchen…

$\overline{2}$

2C. Können drei stochastisch abhängige Ereignisse $A, B, C \subseteq \Omega$ paarweise unabhängig sein?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Wir werfen unabhängig zwei faire Münzen, als Modell $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ mit Gleichverteilung. Darin betrachten wir „Zahl im ersten Wurf“ $A = \{(1,0), (1,1)\}$ und „Zahl im zweiten Wurf“ $B = \{(0,1), (1,1)\}$ sowie „Beide Würfe enden gleich“ $C = \{(0,0), (1,1)\}$. Dann sind (A, B) unabhängig, (A, C) unabhängig, (B, C) unabhängig, doch (A, B, C) abhängig.

$\overline{2}$

2D. Seien $(f_k : [0,3] \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ stetige Funktionen mit Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ in jedem Punkt $x \in [0,3]$. Gilt dann für die Integrale ebenso der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \int_0^3 f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Ein Gegenbeispiel sind die Dreiecksfunktionen $f_k : [0,3] \to \mathbb{R}$ als affin-lineare Interpolation von $f_k(0) = 0$, $f_k(1/k) = k$, $f_k(2/k) = 0$, $f_k(3) = 0$ für $k \geq 1$. (Skizze!)

Erläuterung: Für den Index $k = 0$ können wir die Funktion f_0 beliebig wählen, etwa $f_0 = 0$. Jede der Funktionen f_k ist stetig. In jedem Punkt $x \in [0,3]$ gilt $f_k(x) \to 0$ für $k \to \infty$. Die Grenzfunktion ist demnach gegeben durch $f(x) = 0$. Insbesondere ist auch f stetig. (Stetigkeit kann beim Grenzübergang kaputt gehen, aber hier wollten wir sogar das bewerkstelligen.) Trotz allem gilt $\int_0^3 f_k(x)\mathrm{d}x = 1$. Wir haben also ein Gegenbeispiel.

/2

2E. Wir untersuchen stetig differenzierbare Funktionen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 2 \cdot \sqrt{|y(t)|}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Können sich zwei solche Lösungen u, v kreuzen, von $u(-1) < v(-1)$ zu $u(1) > v(1)$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Eine Lösung ist $v(t) = 0$, eine weitere ist $u(t) = t\,|t|$,
also $u(t) = -t^2$ für $t \leq 0$ und $u(t) = +t^2$ für $t \geq 0$.

Erläuterung: Meist wollen wir Eindeutigkeit, dazu gibt es den E&E–Satz; er sichert insbesondere, dass es keine Überkreuzungen geben kann. Hier ist dieser Satz jedoch nicht anwendbar! (Die rechte Seite ist bei $y = 0$ nicht nach y differenzierbar.) Die beiden überkreuzenden Lösungen lassen sich leicht nachprüfen und illustrieren eindrücklich das Problem.

Ausführlich: Jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat folgende Form: Es gibt $a \leq b$ in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $y(t) = 0$ für $a \leq t \leq b$ und $y(t) = -(a-t)^2$ für $t \leq a$ und $y(t) = (t-b)^2$ für $t \geq b$.

/2

2F. Ist jede Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y'(t) = 1 - \cos(y(t))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ beschränkt?
Hinweis: Hilfreich sind hier die vielen konstanten Lösungen.

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die rechte Seite $f(y) = 1 - \cos(y)$ ist stetig differenzierbar nach y, also können wir den Existenz- und Eindeutigkeitssatz anwenden. Die konstanten Lösungen sind $u_k(t) = 2\pi k$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$. Jede andere Lösung y startet zwischen zwei konstanten Lösungen u_k und u_{k+1}, kann diese dank E&E–Satz *nicht* kreuzen, bleibt also dazwischen beschränkt!

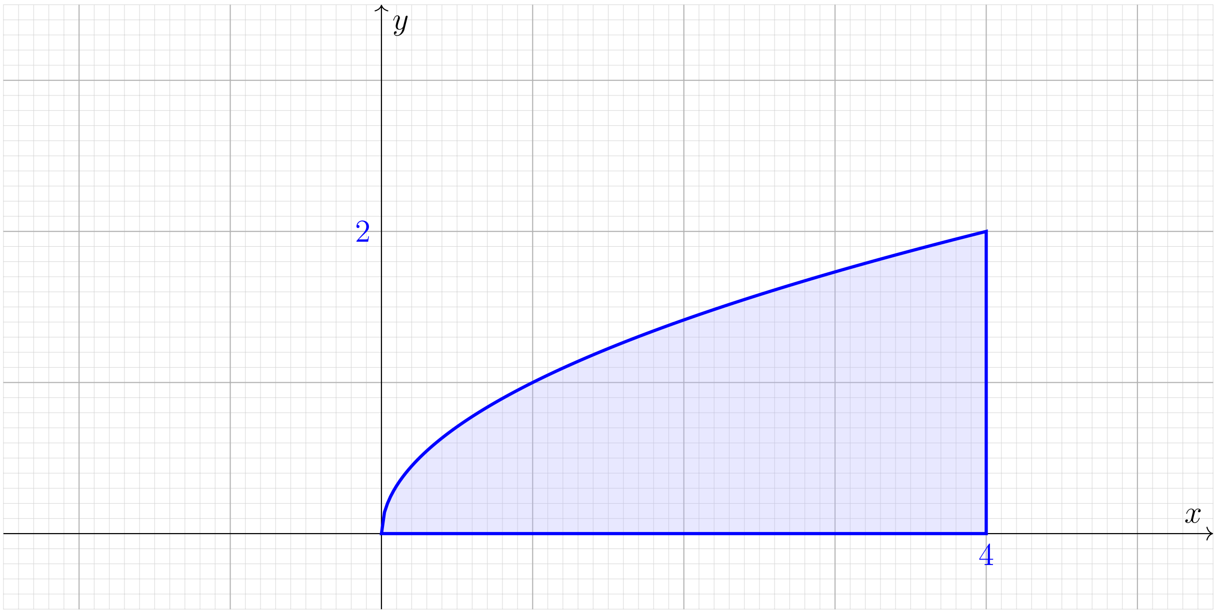
Erläuterung: Diese Differentialgleichung sieht schlimm aus, und das soll sie auch! Als glücklicher Zufall lässt sich sogar explizit lösen, durch $y(t) = -2\,\mathrm{arccot}(t - \cot(y(0)/2))$. Das war hier aber nicht gefragt und nicht die geschickte Lösung. Mit dem E&E–Satz gelingt alles schneller, leichter und effizienter, selbst in noch viel komplizierten Anwendungen. Sie können ja mal ein KI-Modell befragen und kritisch lesen. Derzeit sprudelt schon viel Schlaues, aber beim Versuch logischer Schlussfolgerungen auch noch viel Unsinn.

/2

Aufgabe 3. *Integration und Integralsätze in der Ebene* (14 Punkte)

Wir betrachten das Integral $I := \int_{y=0}^{2} \int_{x=y^2}^{4} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

3A. Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der x–y–Ebene:



Beschreiben Sie den Integrationsbereich als Normalbereich in y–Richtung:

$\boxed{0} \le x \le \boxed{4}$, $\boxed{0} \le y \le \boxed{\sqrt{x}}$ 3

3B. Berechnen Sie das Integral I:

$$I = \int_{x=0}^{4} \int_{y=0}^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \qquad \text{dank Fubini, da Integrand} \ge 0$$

$$= \int_{x=0}^{4} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x} \Big]_{x=0}^{4} = 1 - \mathrm{e}^{-4}$$

Erläuterung: Sie kennen diesen wunderbar nützlichen Satz aus Vorlesung, Quizz und Übung, dazu zahlreiche praktische Anwendungsbeispiele, darunter auch erstaunliche so wie dieses.

In der ersten Reihenfolge erlaubt das innere Integral keine elementare Stammfunktion. Die Vertauschung der Integration ist daher ungemein praktisch: Nun gelingt das Integral leicht!

Warum gilt hier Gleichheit? Der Satz von Fubini gilt für alle Integranden ≥ 0, so auch hier. Die absolute Integrierbarkeit ist in diesem Beispiel keine Voraussetzung, sondern Folgerung.

Übung zur Wiederholung: Formulieren Sie den Satz von Fubini. Was setzen Sie voraus? Was dürfen Sie folgern? Damit lösen Sie Rechnungen wie die obige!

2

Sei $f:\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ ein $\mathscr{C}^1$–Vektorfeld mit $\operatorname{rot} f = 0$, aber $\int_{\partial B(0,1)} f(s) \bullet \mathrm{d}s = 1$.

Aus f und $a \in \mathbb{R}$ konstruieren wir das Dipolfeld $g:\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(\mp 1, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := 2f\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} - a\, f\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}.$$

3C. Bestimmen Sie zu g die Rotation:

$\operatorname{rot} g(x,y) = 2 \operatorname{rot} f(x+1,y) - a \operatorname{rot} f(x-1,y)$ dank Linearität der Rotation

$2 \cdot 0 - a \cdot 0 = 0$ dank $\operatorname{rot} f(x,y) = 0$ und ebenso nach Verschiebung.

Ausführlich: Wir nutzen Linearität und Kettenregel für die partiellen Ableitungen und finden $\partial_x[f_2(x+1,y)] - [\partial_y f_1(x+1,y)] = (\partial_x f_2)(x+1,y) - (\partial_y f_1)(x+1,y) = (\operatorname{rot} f)(x+1,y) = 0$.

Bemerkung: Wir fragen hier bewusst nicht nach expliziten Formeln, um sie nicht zu unnötig aufwändigen Rechnungen zu verleiten. Gibt es solche Vektorfelder überhaupt? Wie sehen sie aus? Wir erinnern uns an das berühmte Wirbelfeld und skalieren es geeignet:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$\overline{}$ 2

3D. Bestimmen Sie $\int_{\partial Q} g(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang dem Rand des Quadrats $Q = [-3,3]^2$.

$\int_{\partial Q} g(s) \bullet \mathrm{d}s = 2 \int_{\partial Q} f(x+1,y)\,\mathrm{d}s - a \int_{\partial Q} f(x-1,y)\,\mathrm{d}s$ dank Linearität des Integrals

$= 2 \int_{\partial B(-1,1)} f(x+1,y)\,\mathrm{d}s - a \int_{\partial B(+1,1)} f(x-1,y)\,\mathrm{d}s$ dank $\operatorname{rot} = 0$ außerhalb der Polstelle

$= 2 \int_{\partial B(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}s - a \int_{\partial B(0,1)} f(x,y)\,\mathrm{d}s = 2 - a$ Verschiebung zurück zum Ursprung

Erläuterung: Zur zweiten Zeile gelangen wir dank Satz von Green oder Homotopie-Invarianz.

Anschaulich: Unser Arbeitsintegral entlang Quadratrands ∂Q misst die „Ladungen“ / Koeffizienten / Residuen 2 und $-a$ der beiden umlaufenen Polstellen. (Beide liegen in Q.)

$\overline{}$ 2

3E. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erlaubt g ein Potential auf $U := \mathbb{R}^2 \smallsetminus (]-\infty, 1] \times \{0\})$?

Antwort und Begründung:

Für jedes $a \in \mathbb{R}$, denn es gilt $\operatorname{rot}(g) = 0$ und das Gebiet U ist einfach zusammenhängend.

Erläuterung: Wie sieht man das? Unser Gebiet U ist sternförmig zum Ursprung $(2, 0)$!

Bemerkung: In vielen Rechnungen / Beispielen / Anwendungen stellt sich Ihnen die Frage, ob Ihr Vektorfeld ein Potential erlaubt oder nicht. Hierzu gibt es effiziente Kriterien, lokal die Rotationsfreiheit, global der einfache Zusammenhang. Die Logik ist allerdings subtil (notwendig ist $\operatorname{rot} = 0$, hinreichend ist zudem einfach zusammenhängend.)

Übung: Wiederholen Sie diesen schönen Satz zur Konstruktion von Potentialen!

2

3F. Für welche $a \in \mathbb{R}$ erlaubt g ein Potential auf $W := \mathbb{R}^2 \smallsetminus ([-1, 1] \times \{0\})$?

Antwort und Begründung:

Dies gelingt nur für $a = 2$.

Für $a \neq 2$ verhindert das Arbeitsintegral $\int_{\partial Q} g(s)\,\mathrm{d}s = 2 - a \neq 0$ ein Potential.

Für $a = 2$ verschwindet dieses offensichtliche Hindernis. Tatsächlich gelingt die Konstruktion eines Potentials $G : W \to \mathbb{R}$ damit wie folgt: Wir haben ein Potential G_U auf U aus der vorigen Frage. Ebenso existiert ein Potential G_V auf $V = \mathbb{R}^2 \smallsetminus ([-1, +\infty[\times \{0\})$. Wir können $G_V(0, 1) = G_U(0, 1)$ anheben. Dann gilt $G_U = G_V$ in *allen* Punkten $(x, y) \in U \cap V$, da obiges Umlaufintegral verschwindet. Ein Potential auf $W = U \cap V$ ist dann $G = G_U \cup G_V$.

Bemerkung: Diese Konstruktion kennen Sie aus Vorlesung und Übung.

3

Aufgabe 4. *Integration und Integralsätze im Raum* (8 Punkte)

Sei $\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig. Hierzu betrachten wir das radiale Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(v) = \alpha(|v|)\, v, \quad \text{ausführlich} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \alpha(r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4A. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes f über die Sphäre $S_r = \partial B(0, r)$ nach außen.
Hinweis: Es geht ohne Parametrisierung der Sphäre.

$$\int_{S_r} f(s) \bullet \mathrm{d}S == \int_{S_r} f(s) \bullet n(s)\, |\mathrm{d}S| \qquad \text{Einheitsnormalenvektor } n(s) \dots$$

$$= \int_{S_r} \alpha(r)\, s \bullet \frac{s}{|s|}\, |\mathrm{d}S| \qquad \dots \text{ einsetzen und kürzen}$$

$$= \alpha(r)\, r \int_{S_r} 1\, |\mathrm{d}S| = \alpha(r)\, 4\pi r^3 \qquad \dots \text{ Flächeninhalt } \mathrm{vol}_2(S_r)$$

Erläuterung: Sie erkennen und nutzen hier die besondere Symmetrie unserer Fläche $S = S_r$. Alternativ wählen Sie für S eine geeignete Parametrisierung Φ, hier etwa Kugelkoordinaten; die Rechnung ist analog, aber länger. In jedem Punkt $s \in S$ der Fläche hat der angeheftete Normalenvektor $\mathrm{d}S = \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi = n(s)\, |\mathrm{d}S|$ eine Richtung $n(s) \in \mathbb{S}^2$, immer normiert und senkrecht zur Fläche S, und als Länge $|\mathrm{d}S| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ den infinitesimalen Flächeninhalt. Egal welchen Rechenweg Sie wählen, das Ergebnis ist glücklicherweise immer dasselbe.

Bemerkung: Wie können wir f divergenzfrei machen, also $\operatorname{div} f = 0$ erreichen?
Dank Gauß ist dann notwendigerweise $\int_{S_r} f(s) \bullet \mathrm{d}S = c$ konstant, also $\alpha(r) = c/(4\pi r^3)$.

2

Wir wählen nun speziell $\alpha(r) = 1/(4\pi r^3)$ und erhalten das Newton–Feld

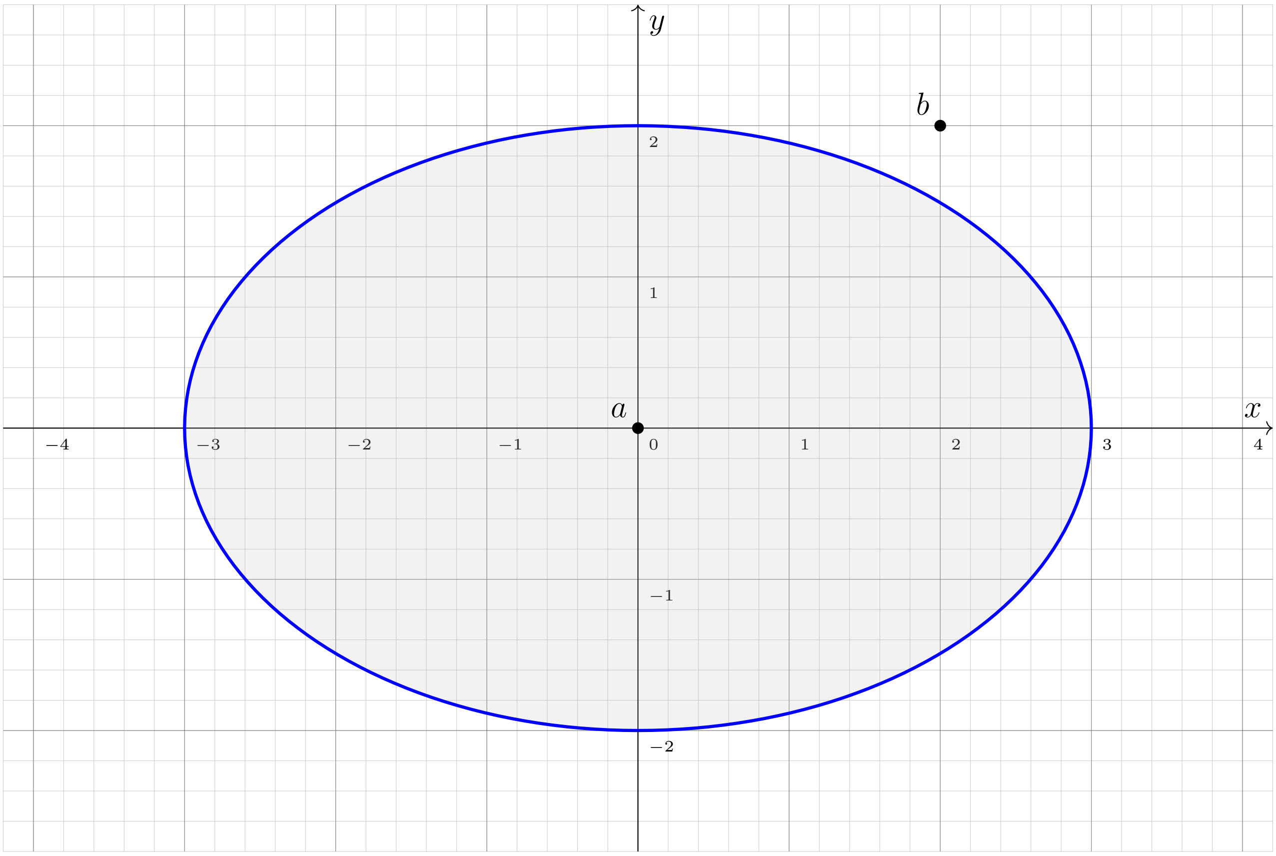
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \frac{1}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad \text{In diesem Falle gilt } \operatorname{div} f = 0 \text{ und } \int_{S_r} f(s) \bullet \mathrm{d}S \text{ hängt nicht von } r \text{ ab.}$$

Zu den Massen $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Gravitationsfeld

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := a\, f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b\, f\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Wir suchen seinen Fluss aus dem Körper $K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2/9 + y^2/4 + z^2 \leq 1 \,\}$.

4B. Skizzieren Sie in der x–y–Ebene die Schnittmenge mit K sowie die zwei Polstellen von g.



3

4C. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes g über den Rand ∂K nach außen.

$$\int_{\partial K} g(s) \bullet \mathrm{d}S = a \int_{\partial K} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}S + b \int_{\partial K} f\begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}S \quad \text{dank Linearität}$$

$$= a \int_{\partial B((0,0,0),\varepsilon)} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \mathrm{d}S \quad \text{dank } \operatorname{div} = 0$$

$$= a \quad \text{dank 4A}$$

Erläuterung: Im ersten Schritt nutzen wir die Linearität des Integrals. Zur zweiten Zeile nutzen wir den Integralsatz von Gauß: Auf K ist $f(x-2, y-2, z)$ stetig differenzierbar mit $\operatorname{div} = 0$, also verschwindet dieses letzte Flussintegral. Hingegen hat $f(x, y, z)$ seine Polstelle in $(0, 0, 0)$, wir nutzen daher Gauß für $K \smallsetminus \operatorname{Int} B((0, 0, 0), \varepsilon)$. Zur dritten Zeile nutzen wir die Normierung aus Frage 4A.

Bemerkung: Diese raffinierte Vorgehensweise kennen Sie vielfach aus Vorlesung und Übung, sowohl zwei- als auch dreidimensional. Hier können Sie dies effizient nutzen.

Anschaulich: Unser Flussintegral des Gravitionsfelds g über den Rand ∂K misst die Massen / Ladungen / Koeffizienten der Polstellen im Inneren des Körpers K.

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (8 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Dazu existiert v_4 so, dass $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten zu A ist. Bestimmen Sie die Jordan–Normalform $J = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ von A.

$$Av_1 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Eigenvektor!}}, \qquad Av_2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Hauptvektor!}}$$

$$Av_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +0v_1 \\ +1v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Hauptvektor!}}, \qquad J = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Jordan–Form!}}$$

4

5B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_k' = Ay_k$ und $y_k(0) = v_k$:

$$y_2(t) = \boxed{v_2 + tv_1 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}}, \qquad y_3(t) = \boxed{v_3 + tv_2 + \frac{t^2}{2} v_1 = \begin{pmatrix} t + t^2/2 \\ 2+t \\ -1 \\ t^2/2 \end{pmatrix}}$$

2

5C. Wir wählen den Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^4$ zufällig, stetig verteilt um den Nullpunkt. Wie verhält sich typischerweise die Lösung $t \mapsto y(t)$ für $t \to \infty$?

- ☐ $|y(t)|$ bleibt beschränkt für $t \to \infty$.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst linear in t.
- ☒ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst quadratisch in t.
- ☐ $|y(t)|$ ist unbeschränkt und wächst exponentiell in t.

Begründung: Jede Lösung y ist eine Linearkombination $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, wobei $y_1(t) = v_1$ und $y_4(t) = \mathrm{e}^{-2t} v_4$. (Letzter Eigenwert -2 dank Spur!) Mit Wkt 1 gilt $\alpha_3 \neq 0$. Die Lösung $y(t)$ wächst dann quadratisch in t.

Erläuterung: Theoretisch möglich ist auch linear ($\alpha_3 = 0$), beschränkt ($\alpha_2 = \alpha_3 = 0$), oder Konvergenz gegen 0 (für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Diese Fälle haben jedoch Wkt 0.

2

Aufgabe 6. *Partielle Differentialgleichungen* (7 Punkte)

Finden Sie alle $\mathscr{C}^1$–Funktionen $u : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} x\,\partial_x u(x,y) + y\,\partial_y u(x,y) = 2\,u(x,y) & \text{für alle } x, y > 0, \\ u(2,y) = y^{-1} & \text{für alle } y > 0. \end{cases}$$

Hierzu sei $\gamma(s) = (X(s), Y(s))$ die Charakteristik mit $\gamma(0) = (2, y_0)$ und $U(s) = u(X(s), Y(s))$.

6A. Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu (P) auf:

$X'(s) = X(s)$, $X(0) = 2$,

$Y'(s) = \boxed{Y(s)}$, $Y(0) = \boxed{y_0}$,

$U'(s) = \boxed{2U(s)}$, $U(0) = \boxed{y_0^{-1}}$. 2

6B. Nennen Sie die Lösung dieses charakteristischen Differentialgleichungssystems:

$X(s) = 2\,\mathrm{e}^s$,

$Y(s) = \boxed{y_0\,\mathrm{e}^s}$,

$U(s) = \boxed{y_0^{-1}\,\mathrm{e}^{2s}}$. 2

6C. Bestimmen Sie zu $(x, y) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ die Werte s und y_0 so, dass $\gamma(s) = (x, y)$ gilt:

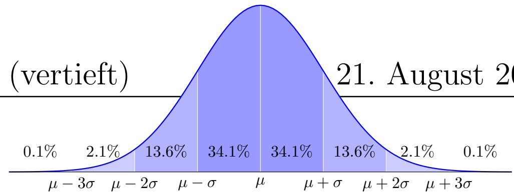
$s = \boxed{\ln(x/2)}$, $y_0 = \boxed{2y/x}$. 2

6D. Geben Sie die Lösung u von (P) an.

$$u(x,y) = U(s) = y_0^{-1}\,\mathrm{e}^{2s} = \frac{x}{2y} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} x^3 y^{-1}$$

Machen Sie die Probe!

Erfolgreiche Probe zeigt die Existenz einer Lösung. Unsere Herleitung zeigt die Eindeutigkeit. 1



Aufgabe 7. *Wahrscheinlichkeit* (12 Punkte)

7A. Sie wiederholen 480 000 mal unabhängig ein Experiment mit Trefferwahrscheinlichkeit 25%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p erhalten Sie höchstens 120 420 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 480\,000 \cdot \frac{1}{4} = 120\,000$ — Erwartung zu $B(n,t)$, $n = 480\,000$, $t = 0.2$

$\sigma^2 = 120\,000 \cdot \frac{3}{4} = 90\,000, \quad \sigma = 300$ — Varianz und Streuung zu $B(n,t)$

$p \approx \int_{-\infty}^{\beta} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad \beta = 420.5/300 = 1.40166\ldots$ — Lokaler Grenzwertsatz, Stetigkeitskorrektu

$\approx 0.50 + 0.42 = 0.92 = 92\%$ — Ablesen aus der Tabelle

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, $B(n,t)$ mit $n = 480\,000$ und $t = 0.25$. Die exakte Wkt ist somit $p = \sum_{k=0}^{120420} B(n,t)(k)$, doch die Summation ist allzu mühsam. Als gute Näherung nutzen wir die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\beta = 420/\sigma \approx 1.4$; das ist etwas ungenauer, der Unterschied verschwindet glücklicherweise in der Rundung. Alles wird gut.

3

7B. Sie wiederholen 10 000 mal ein Experiment mit Trefferquote 99.98% (zufällig, unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit q erhalten Sie mindestens 9 998 Treffer? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

$\mu = 10\,000 \cdot 0.02\% = 2$ — Erwartungswert für die Anzahl der Nicht-Treffer / Nieten

$q \approx \left[\frac{\mu^0}{0!} + \frac{\mu^1}{1!} + \frac{\mu^2}{2!}\right] \mathrm{e}^{-\mu}$ — Näherung durch die Poisson–Verteilung $P(\mu)$

$\approx 5 \cdot 0.135 = 0.675 \approx 68\%$ — Einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Die exakte Verteilung ist binomial, $B(n,t)$ mit $n = 10\,000$ und $t = 0.0002$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.67667\ldots$, die Poisson–Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen dazu hilfreiche Fehlerschranken, diese werden hier nicht gefragt.

Fun fact: Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen. Wer es dennoch tut, wie derzeit manche KI, findet mit $0.638 \approx 64\%$ eine unnötig schlechte Näherung.

3

7C. Sie würfeln viermal mit einem fairen, zehnseitigen Würfel (kurz „D10"). Mit welcher Wkt r sind unter den vier Ergebnissen mindestens zwei gleiche? (Antwort als gekürzter Bruch)

$$r = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 1 - \frac{63}{125} = \frac{62}{125}$$

Erläuterung: Sie kennen diese Rechnung von Kollisionswkten vom Geburtstagsparadox. Hier berechnen und vergleichen wir diese Wkt mal explizit ohne Näherung.

2

7D. Von 73 äußerlich gleichen, sechsseitigen Würfeln sind 72 fair, doch einer ist gezinkt und würfelt nie die 6. Sie wählen zufällig einen dieser 73 Würfel und würfeln n mal unabhängig. Wenn keiner der n Würfe eine 6 ergibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit w_n ist Ihr Würfel der gezinkte? Berechnen Sie allgemein w_n und speziell den Wert w_2 (Letzteren als gekürzten Bruch).

Bezeichnung: Wir betrachten das Ereignis $F :=$ „Ihr Würfel ist fair" und komplementär dazu $G := \overline{F} =$ „Ihr Würfel ist gezinkt" sowie $T_n :=$ „Keiner der n Testwürfe ergibt 6". *Daten:* Gegeben ist $\mathbf{P}(G) = 1/73$ und $\mathbf{P}(F) = 72/73$ sowie $\mathbf{P}(T_n|G) = 1$ und $\mathbf{P}(T_n|F) = (5/6)^n$. *Rechnung:*

$$w_n = \mathbf{P}(G|T_n) = \frac{\mathbf{P}(G \cap T_n)}{\mathbf{P}(T_n)} = \frac{\mathbf{P}(T_n|G) \cdot \mathbf{P}(G)}{\mathbf{P}(T_n|G) \cdot \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(T_n|F) \cdot \mathbf{P}(F)} \qquad \text{dank Bayes}$$

$$= \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73}}{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{73} + \frac{5^n}{6^n} \cdot \frac{72}{73}} = \frac{1}{1 + \frac{5^n}{6^n} \cdot 72} \qquad \text{Daten einsetzen und vereinfachen / kürzen}$$

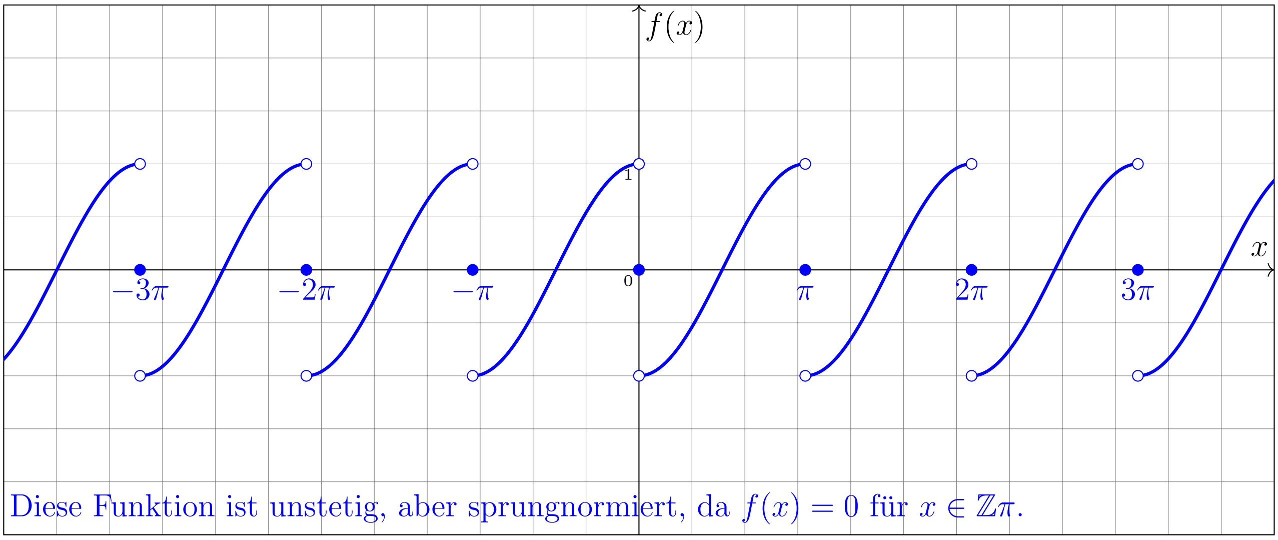
Erläuterung: Dies ist die vertraute Formel von Bayes. Der entscheidende Schritt ist hier, wie so oft, zunächst die gegebenen Daten aufzuschreiben. Die Rechnung ist dann erfreulich leicht. Schön und nützlich: Die Sprache der Mathematik / Wahrscheinlichkeit hilft zur Klarheit.

Fun fact: Der Vergleich der konkreten Zahlen ist lehrreich, vielleicht sogar erstaunlich. Die Werte wurden dabei mit Bedacht so gewählt, dass die Rechnung für $n = 1, 2, 3$ leicht aufgeht. Für $n \to \infty$ gilt $w_n \nearrow 1$, doch die Folge wächst zunächst nur langsam. Vergleichen Sie hingegen die Konvergenz in der analogen Aufgabe in der vorigen Klausur vom 26.02.2025.

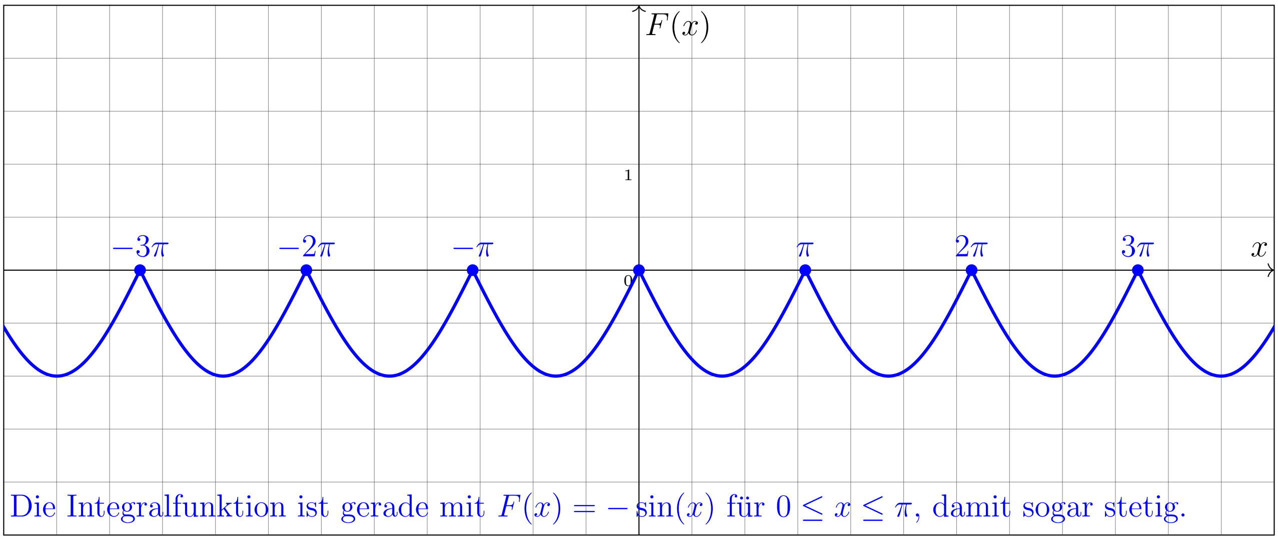
Konkrete Zahlenwerte: $w_0 = \frac{1}{73}$, $w_1 = \frac{1}{61}$, $w_2 = \boxed{\frac{1}{51}}$, $w_3 = \frac{3}{128}$ 4

Aufgabe 8. *Fourier–Reihen* (14 Punkte)

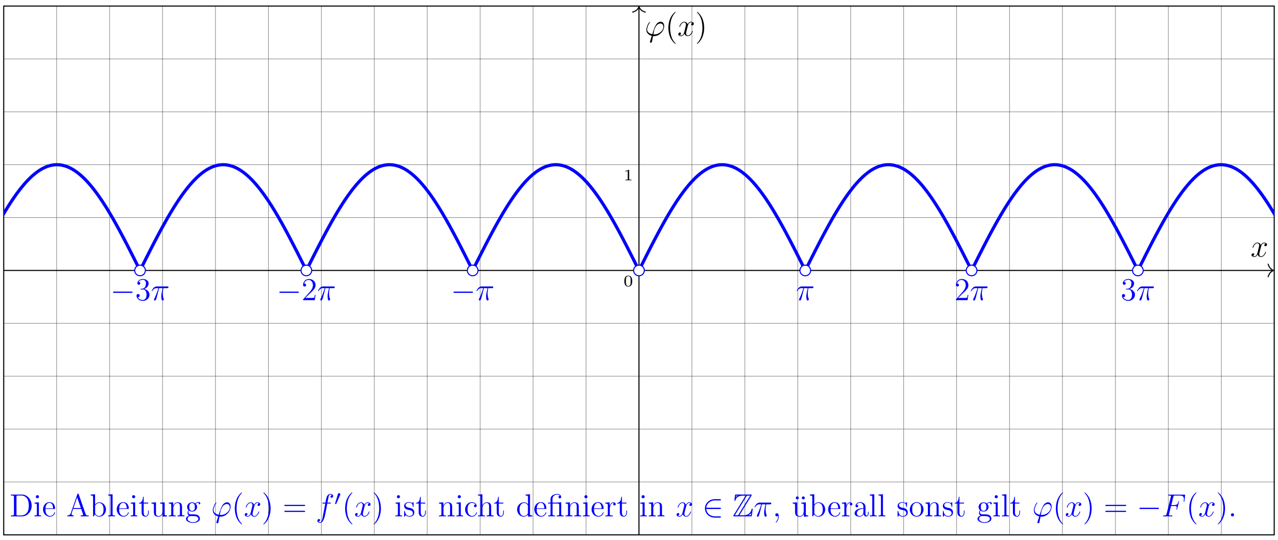
8A. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade 2π–periodisch mit $f(x) = -\cos(x)$ für $0 < x < \pi$. Skizzieren Sie f sowie die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ und die Ableitung $\varphi = f'$ auf $[-12, 12]$.



Diese Funktion ist unstetig, aber sprungnormiert, da $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Z}\pi$.



Die Integralfunktion ist gerade mit $F(x) = -\sin(x)$ für $0 \le x \le \pi$, damit sogar stetig.



Die Ableitung $\varphi(x) = f'(x)$ ist nicht definiert in $x \in \mathbb{Z}\pi$, überall sonst gilt $\varphi(x) = -F(x)$. 3

8B. Bestimmen Sie zu f die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$.

Hinweis: Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(s)\cos(t) = \frac{1}{2}[\sin(s+t) + \sin(s-t)]$.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin(kx)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$ gerader Integrand!

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)\,\mathrm{d}x$$ dank Hinweis. Hier schon $b_1 = 0$.

$$= -\frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos((k+1)x)}{k+1} - \frac{\cos((k-1)x)}{k-1}\Big]_{x=0}^{\pi}$$ für $k \ge 2$. **Sonderfall $k = 1$ s.u.**

$$= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} + \frac{1-(-1)^{k-1}}{k-1}\Big]$$ einsetzen und vereinfachen

$$= \frac{-2k}{\pi(k^2-1)}\Big[1-(-1)^{k+1}\Big]$$ zusammenfassen

$$= \begin{cases} \dfrac{-4k}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$ ausrechnen wie immer

Achtung! In der dritten Zeile müssen wir $k \ge 2$ voraussetzen! Der **Sonderfall** $k = 1$ muss daher noch separat behandelt werden. Daran muss man denken, dann gelingt es recht leicht: In der zweiten Zeile sehen wir $b_1 = 0$, die letzte Formel gilt also tatsächlich sogar für $k = 1$. Ausführlich finden wir $b_1 = -\frac{1}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin(2x) + \sin(0x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi}[-\cos(2x)/2]_{x=0}^{\pi} = 0$.

Erläuterung: Wie in der freundlichen Aufgabenstellung angegeben, gilt hier $a_k = 0$, da die Funktion f ungerade ist. Zur Vereinfachung wurde nach diesen Koeffizienten nicht gefragt.

Die grundlegenden Additionstheoreme haben Sie vermutlich in Ihrer Formelsammlung. Um die Rechnung für Sie möglichst flüssig zu gestalten, haben wir die relevante Gleichung explizit angegeben, auch als Hinweis und Zuspruch, dass Sie auf dem richtigen Weg sind. Der Rest ist sorgsames Rechnen, wie zuvor in zahlreichen Beispielen gesehen und geübt.

5

8C. Bestimmen Sie zur Ableitung φ die Fourier–Reihe $\varphi(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx)$.

Für $k \ge 1$ gilt:

$$\alpha_k = -A_k = b_k/k = \begin{cases} \dfrac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Integration (!) von f zu $F = -\varphi$

Erläuterung: Dank Integrationsregel ist die Rechnung leicht. Naive Ableitung wäre fatal!

Nochmal zur Betonung, wie schon in Vorlesung und Übung: Integrieren gelingt termweise, wie hier zu sehen, doch beim Ableiten ist Vorsicht geboten, das wäre hier falsch!

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{x=0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos(x)\Big]_{x=0}^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

Erläuterung: Bei der Integration wird der nullte Koeffizient / die Integrationskonstante separat berechnet. Hier hilft Ihnen die Skizze, explizite Rechnung ist ebenso gut möglich.

3

8D. Bestimmen Sie den exakten Wert der Reihe $S := \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{4\ell^2}{(4\ell^2-1)^2} \in [0.61, 0.62]$.

Hinweis: Energiegleichung nach Parseval.

$$\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{16 \cdot 4\ell^2}{\pi^2(4\ell^2-1)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(x)\big|^2\,\mathrm{d}x$$ Energiegleichung für f, mit $k = 2\ell$ gerade

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$ Graphik / Formelsammlung / Stammfunktion / ...

$S = \pi^2/16 \approx 0.61685\ldots$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Wie kommen Sie selbst auf diese Lösung? Der freundliche Hinweis hilft.

Er wäre eigentlich nicht nötig: Ein Vergleich der gesuchten Reihe mit den oben berechneten Koeffizienten führt (quadriert!) direkt zur Energiegleichung. Alternativ kann man die obigen Fourier-Reihen in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ auswerten, das passt aber nicht zur gefragten Reihe.

Wie so oft produziert die Fourier–Theorie wunderbare Reihengrenzwerte, die andernfalls kaum zu berechnen wären. Mit den richtigen Werkzeugen rechnen Sie sicher und effizient.

3