Fachbereich Mathematik der Universität Stuttgart

Prof. Dr. Bernard Haasdonk
Zahra Askarpour, M. Sc.
Fabio Musco, M. Sc.
Daniel Winkle, M. Sc.

Höhere Mathematik 3 für el

Klausur

Wintersemester 2024/25

Lesen Sie bitte alle Hinweise sorgfältig durch bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen.

- Die Klausur besteht aus **6 Aufgaben**. Insgesamt können Sie **40 Punkte** erreichen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt **120 Minuten**.
- Zugelassene Hilfsmittel: Ein DIN A4 Blatt beidseitig **eigenhändig handbeschrieben**, als Hilfsmittel markiert und mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer versehen.
- Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, **sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist**. Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen.
- Eine Lösung kann nur dann gewertet werden, wenn der **Lösungsweg klar erkennbar** ist. **Fehlende Begründungen führen zu Punktabzug.**
- Verwenden Sie zum Lösen **jeder Aufgabe ein separates Blatt**.
- Das Papier wird Ihnen zur Verfügung gestellt.
- Versehen Sie **jedes Blatt** mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Abgaben, die mit einem Bleistift, radierbarer Tinte oder Rotstift geschrieben sind, werden **nicht** gewertet.
- Folgende Ableitungen und Stammfunktionen dürfen Sie ohne Weiteres verwenden

$f(x)$	$\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$	$\frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$	$\sin(x) - x\cos(x)$	$e^x(x-1)$
$\frac{d}{dx}f(x)$	$\sin^2(x)$	$\sin^3(x)$	$x\sin(x)$	xe^x

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
Punkte							

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (Differentialgleichungssystem) [2+2 = 4 Punkte].

Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = Ay \qquad \text{zur Matrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ von A.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung y.

Aufgabe 2 (Fourierreihe) [2+2+2 = 6 Punkte].

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2-periodische Fortsetzung der Funktion $g : [0, 2) \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^t - 1 & \text{falls } t \in [0, 1) \\ 1/2(\mathrm{e} - 1) & \text{für } t = 1 \\ 0 & \text{falls } t \in (1, 2). \end{cases}$$

(a) An welchen Stellen t konvergiert die Fourierreihe von f punktweise? Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe an diesen Stellen jeweils?

(b) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ von f.

(c) Berechnen Sie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$.

Aufgabe 3 (Fouriertransformation) [7 Punkte].

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{falls } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ von f.

Aufgabe 4 (Mehrdimensionale Integration) [2+4+5 = 11 Punkte].

(a) Es bezeichne $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck bestehend aus den Eckpunkten $(-1, 0)^T, (0, 0)^T$ und $(1, 1)^T$. Schreiben Sie D als y-Normalbereich und berechnen Sie $\mathrm{vol}(D)$.

(b) Wir betrachten das Prisma $P := D \times [0, 4] \subset \mathbb{R}^3$ und das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := \mathrm{e}^z(x + y).$$

Berechnen Sie

$$\int_P f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

(c) Die Massendichte $\rho : P \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\rho(x, y, z) := \begin{cases} 2 & \text{falls } \quad z \geq 3 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechen Sie die Koordinaten x_S und z_S des Schwerpunkts $(x_S, y_S, z_S)^T \in \mathbb{R}^3$ von P.

Aufgabe 5 (Integralsätze) [5+2 = 7 Punkte].

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x, y, z) := (x^3, y^3, z)^T$$

für $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral zweiter Art

$$\int_{\partial G} \langle f, \mathbf{n} \rangle\, \mathrm{d}o.$$

(b) Es sei $D := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + (y+4)^2 \leq 1\}$. Das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$v(x,y) := (y, 2x)^T$$

Berechnen Sie $\oint_C \langle v(\mathbf{x}), \mathrm{d}\mathbf{x} \rangle$, wobei C den Rand von D einmal entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft.

Aufgabe 6 (Partielle Differentialgleichung) [1+4 = 5 Punkte].

(a) Wir betrachten für $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die lineare partielle Differentialgleichung mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a u_{xx} + b u_{yy} + c u_x = u.$$

i) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung elliptisch ist.

ii) Bestimmen Sie für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung hyperbolisch ist.

(b) Geben Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ der folgenden Anfangswertprobleme an

i) $u_t + 5u_x = 0, \quad u(x,0) = \sin(x).$

ii) $u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \cos(x), \quad u_t(x,0) = 1.$